This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

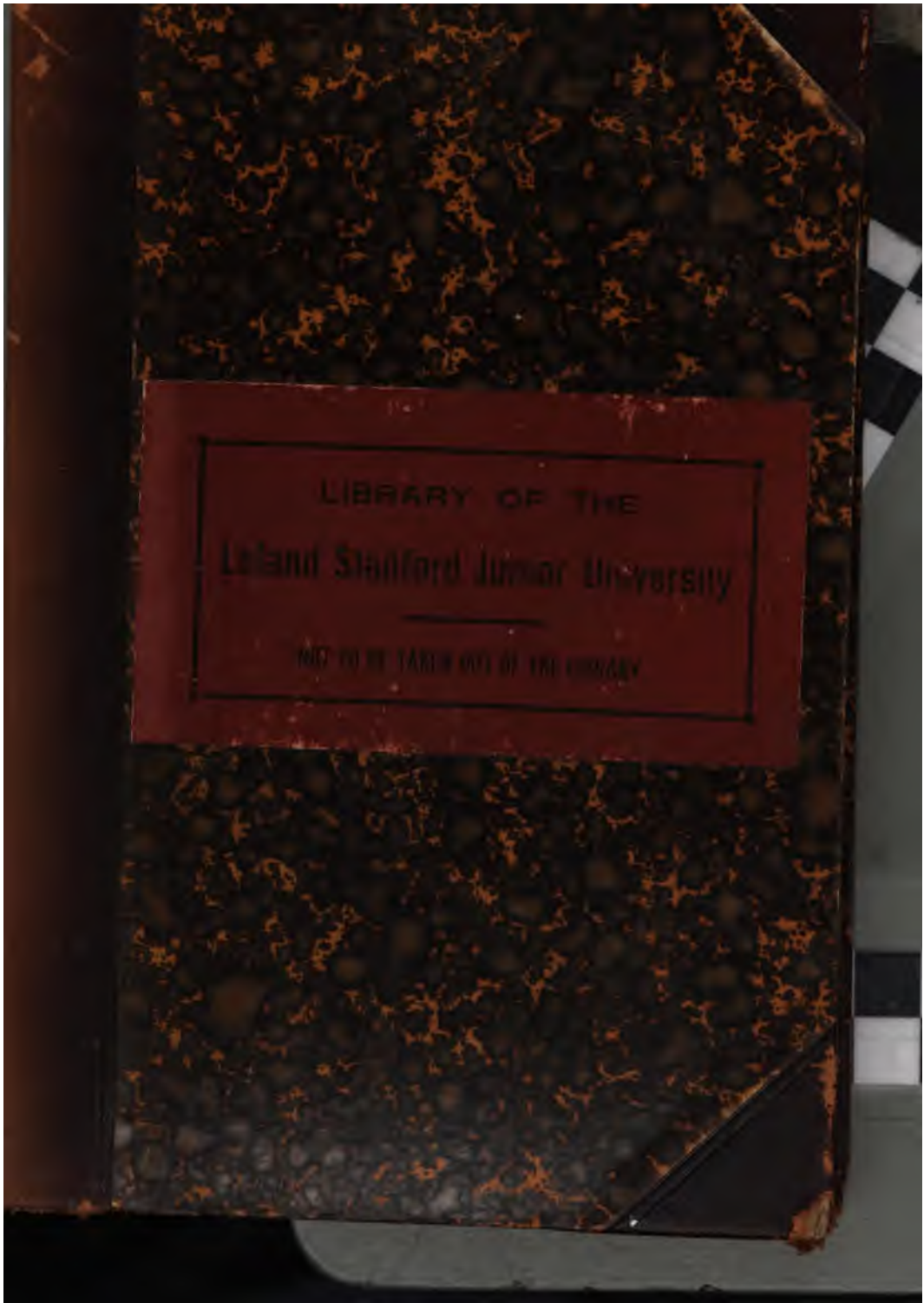
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

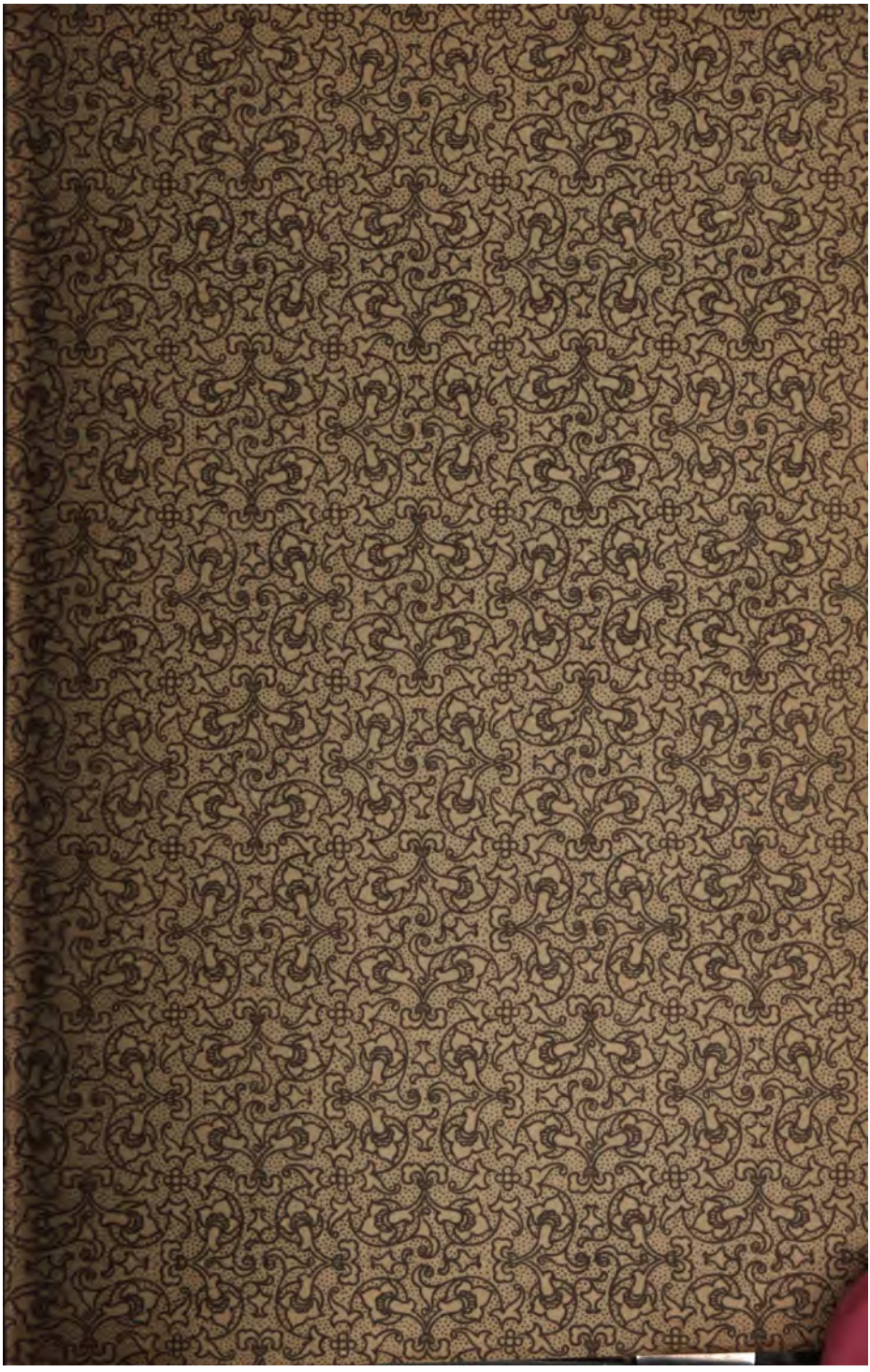
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University
NOT TO BE TAKEN OUT OF THE LIBRARY

The Hopkins Library
presented to the
Leland Stanford Junior University
by Timothy Hopkins.



The Hopkins Library
presented to the
Leland Stanford Junior University
by Timothy Hopkins.

GUSTAV E. STECHERT
810 Broadway
NEW-YORK.

TG445
S69

Die Grundzüge

der Festigkeitslehre

in ihrer besonderen Anwendung

auf die Berechnung

provisorischer Eisenbahn-Brücken.

Zusammengestellt durch

Sommerfeldt

Premierlieutenant im Eisenbahn-Regiment Nr. 2.

Mit zahlreichen Abbildungen im Texte.

Berlin 1892.

Ernst Siegfried Mittler und Sohn

Königliche Hofbuchhandlung

Kochstraße 68–70.

Inhalts-Verzeichniß.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt.

Gesetze über das Verhalten der Kräfte.

§ 1. Definition der Kraft und deren Wirkung 1
§ 2. Verhalten einer Einzellast 3
§ 3. Verhalten von zwei oder mehreren Kräften, deren Richtungslinien durch denselben Punkt gehen.
a) Zusammensetzen zu einer Einzelkraft 5
b) Zerlegen einer Einzelkraft in mehrere Kräfte 8
c) Gleichgewichtsbedingung 9
§ 4. Kraftmomente 19
§ 5. Verhalten paralleler Kräfte
a) Zusammensetzen zu einer Einzelkraft 22
b) Gleichgewichtsbedingung 26
§ 6. Kräftepaare 32

II. Abschnitt.

Festigkeit der Materialien.

§ 7. Aufgabe der Festigkeitslehre und die verschiedenen Arten der Festigkeit 35
§ 8. Zug- und Druckfestigkeit 37
a) Zugfestigkeit 38
b) Druckfestigkeit 45
c) Zerknickungsfestigkeit 45

Seite

§ 9. Schubfestigkeit 54

§ 10. Biegungsfestigkeit 59

A. Wirkungsweise der äußeren Kräfte (Biegungsmoment) . 60

B. Bestimmung der inneren Spannungen

a) Spannungsmoment 64
b) Transversalspannungen 81

C. Bestimmung des Maximal-Biegungsmomentes 85

a) bei ruhender Belastung:

α) für eine Einzellast 85
β) für gleichmäßig vertheilte Last 96
γ) für mehrere Einzellasten 105
δ) für gleichzeitige Beanspruchung durch gleichmäßig vertheilte Belastung und Einzellasten 113

b) bei fortschreitender Belastung 119

D. Bestimmung der Maximal-Transversalkraft für fortschreitende Belastung 136

E. Berechnung von kontinuirlichen Trägern 151

F. Belastung der Eisenbahn-Brücken 155

1. Direkte Belastung 155
2. Indirekte Belastung 158

G. Ueber die horizontalen Schubspannungen 188

a) Verdübelte Träger 196
b) Offen gebaute Träger 217

§ 11. Die Ritter'sche Schnittmethode 218

In dem Buche sind folgende Abkürzungen gebraucht:

M. T. = Muencke's Taschenbuch über Berechnung ꝛc. von Eisenbahn-Brücken.
$\sim$ = ungefähr, abgerundet bei Zahlen, — ähnlich bei Figuren
$\cong$ = kongruent
∞ = unendlich
$a < b$ = a kleiner als b
$a > b$ = a größer als b
$a \geqq b$ = a größer oder gleich b
$\overline{ab}$ = Linie ab
$ab = a \times b$
$\parallel$ = parallel.

Einleitung.

Ein Körper wird auf Festigkeit beansprucht, wenn äußere Kräfte auf ihn einwirken; und zwar bedeutet Festigkeit den inneren Widerstand, welchen das Material des Körpers der Wirkung jener äußeren Kräfte entgegensetzt; ein innerer Widerstand läßt sich nur leisten durch gewisse innere Kräfte, welche zu den äußeren in bestimmten Beziehungen stehen (s. § 7).

Die Festigkeitslehre behandelt nun diese Beziehungen zwischen den äußeren und inneren Kräften eines Körpers, beschäftigt sich also ausschließlich mit Kräften.

Da in der Statik der Brückenkonstruktionen es sich ebenfalls nur um Kräfte, speziell um den Gleichgewichtszustand von Kräften handelt, so erscheint es zweckmäßig, zunächst die wesentlichsten Sätze über das Verhalten der Kräfte im Allgemeinen und den Gleichgewichtszustand von Kräften im Besonderen vorweg zu nehmen, ehe wir zur Behandlung der eigentlichen Festigkeitslehre übergehen.

I. Abschnitt.

Gesetze über das Verhalten der Kräfte.

§ 1.

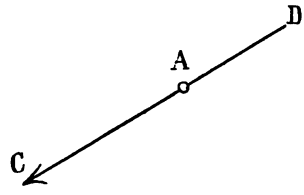
Definition der Kraft und deren Wirkung.

Die Kraft ist etwas Unsichtbares und wird wahrgenommen nur durch ihre Wirkung. Um sie jedoch als Rechnengröße einführen und auf dem Papier darstellen zu können, muß man wissen, wodurch eine Kraft bestimmt ist.

Eine Kraft ist hinsichtlich ihrer statischen Wirk
bestimmt, wenn bekannt ist:

1. Lage und Richtung der Kraft,
2. die Intensität, mit welcher die Kraft wirkt.

Fig 1.



ad 1. Die Lage ist
kannt, sobald ein Punkt A
Raum gegeben ist, durch wel
die Richtungslinie CD der K
(Aktionslinie) hindurch
(Fig. 1). Der Richtungss
wird gekennzeichnet durch ei
Pfeil.

ad 2. Die Intensität wird gemessen durch Gewid
einheiten, kg oder tons; man bezeichnet ihre Größe entw
durch Angabe der Einheiten (Fig. 2) oder durch eine Str

Fig. 2.

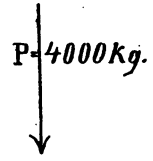
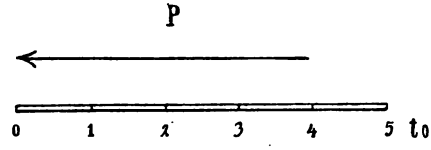


Fig. 3.



von bestimmter Länge auf der Aktionslinie, unter Zugrun
legung eines besonderen Kräftemaßstabes, z. B. 1t = 1
(Fig. 3).

Die in Figur 3 dargestellte Kraft hat demnach eine In
sität = 4 tons = 4000 kg.

Die Wirkung einer Kraft ist Bewegung. Soll k
Bewegung, also Ruhe, eintreten, so muß ein Widerstand, d
eine zweite Kraft vorhanden sein, welche die Wirkung der erst
aufhebt.

Beispiel:

Wenn man mit der Hand gegen eine Fensterscheibe dri
so wird so lange Ruhe bestehen, als das Glas dem Drucke

Hand zu widerstehen vermag. Ist die Scheibe bei zunehmendem Drucke hierzu nicht mehr im Stande, so wird die Hand durch die Scheibe hindurchfahren, d. h. die Kraft der Hand erzeugt Bewegung, sobald ihr keine widerstehende Kraft entgegenwirkt.

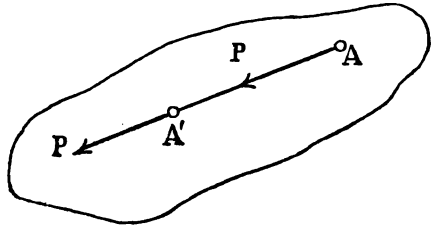
Da nun jeder Körper, auf welchen eine äußere Kraft in irgend einer Weise (drückend, ziehend, biegend ꝛc.) einwirkt, dieser Wirkung durch sein Gewicht, bezw. seine Festigkeit, einen gewissen Widerstand entgegensetzt, so wird eine Wirkung allein nie bestehen können, sondern es muß stets eine Gegenwirkung vorhanden sein. Wenn daher in der Festigkeitslehre oder Statik irgend eine äußere Kraft auftritt, so hat man zunächst stets die erforderliche innere Gegenkraft zu suchen und zu bestimmen. Auf diesem Gegenseitigkeitsverhältniß zwischen der äußeren Kraft und der inneren Gegenwirkung eines Körpers beruht das ganze Wesen der Festigkeitslehre und der Statik.

§ 2.

Verhalten einer Einzelkraft.

In den folgenden Betrachtungen der Kräfte möge zunächst von der Gegenwirkung abgesehen und nur die Wirkung der

Fig. 4.



Kraft auf den Bewegungszustand des Körpers ins Auge gefaßt werden. Für eine Einzelkraft gilt folgendes Gesetz:

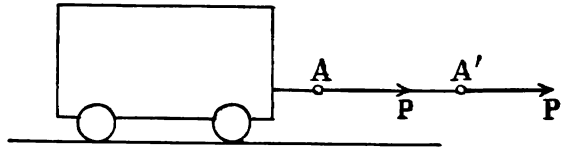
Wenn eine Kraft P im Punkte A (Fig. 4) wirkt, so kann man die Kraft in ihrer Richtung nach

A′ verschieben, ohne den Bewegungszustand des ganzen Körpers zu stören bezw. zu ändern.

Beispiel (Fig. 5):

Ein Wagen, an dem ein Zugtau befestigt ist. Die Wirkung der Kraft P auf die Bewegung des Wagens bleibt dieselbe, ob P in A oder A′ wirkt, wenn nur die Richtung des Taues nicht geändert wird.

Fig. 5.



§ 3.

Verhalten von zwei oder mehreren Kräften, deren Richtungslinien durch denselben Punkt gehen.

a) Zusammensetzen zu einer Einzelkraft.

Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig einen Körper angreifen, so kommt es darauf an, die Gesammtwirkung dieser Kräfte auf den Bewegungszustand des Körpers zu ermitteln, d. h. eine Einzelkraft nach Größe, Lage und Richtung zu finden, deren Wirkung gleich ist derjenigen der angreifenden Kräfte zusammen.

Wirken die Kräfte in derselben Richtungslinie, so ist ihre Gesammtwirkung gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte.

Gleichgerichtete Kräfte haben dabei gleiche Vorzeichen, entgegengesetzt gerichtete ungleiche Vorzeichen (Fig. 6 und 7, siehe Seite 5).

Wenn die Kräfte nicht in derselben Richtungslinie liegen, so vereinigt man sie zu einer Einzelkraft vermittelst des Kräfteparallelogramms.

Wenn an einem Körper im Punkte A zwei Kräfte, P und Q, wirken, so ist die zu suchende Einzelkraft gleich der Diagonale des aus P = AB und Q = AC gebildeten Parallelogramms (Fig. 8, siehe Seite 6). Die Diagonale R nennt man die Resultante, P und Q die Komponenten.

Fig. 6.

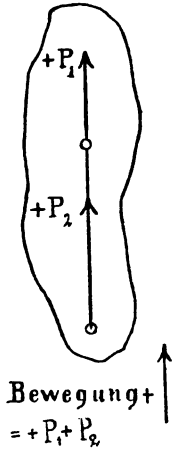
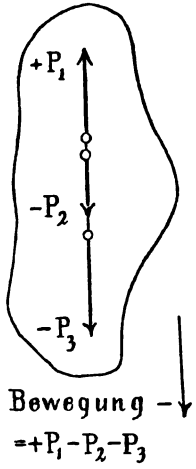


Fig. 7.

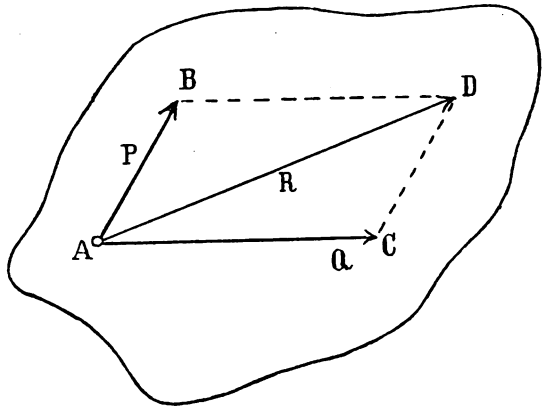


Beweis:

Die Kraft P sei so groß, daß sie den Körper in einer Sekunde von A nach B bewege, die Kraft Q so groß, daß sie den Körper in einer Sekunde von A nach C bewege. Es ist für das Resultat der Bewegung des Körpers gleichgültig, ob P und Q gleichzeitig eine Sekunde auf den Körper einwirken, oder ob erst P allein und unmittelbar hinterher Q allein je

eine Sekunde lang wirken. In letzterem Falle würde die Kraft P den Körper in der ersten Sekunde von A nach B und die Kraft Q ihn dann in der zweiten Sekunde von B nach D bewegt haben. Nach diesem Punkte D würde der Körper auch gelangt sein müssen, wenn beide Kräfte gleichzeitig auf den Körper eine Sekunde lang eingewirkt hätten und zwar auf dem direkten Wege AD. Da nun die Längen der einzelnen Wege AB und AC in einer Sekunde hier gleichzeitig die Größe der

Fig. 8.



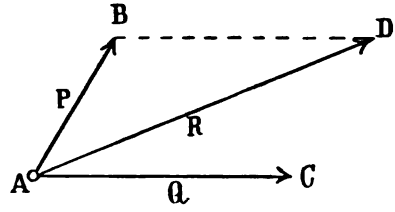
Kräfte P und Q angeben, so giebt die Länge des Weges AD die Größe derjenigen Kraft R an, welche erforderlich wäre, um den Körper in einer Sekunde direkt von A nach D zu bewegen. Diese Kraft R übt also auf den Bewegungszustand des Körpers dieselbe Wirkung aus, wie die Kräfte P und Q zusammen.

Um die Resultante zu finden, ist es nicht nöthig, das ganze Parallelogramm zu konstruiren. Wenn die Kräfte P und Q, in A wirkend, gegeben sind = AB bezw. = AC (Fig. 9, siehe Seite 7), so trägt man AC der Größe und Richtung nach in B an AB an = BD, zieht AD, und erhält AD als die Resul-

tante von P und Q. Das so entstehende Dreieck ABD nennt man das **Kräftedreieck**.

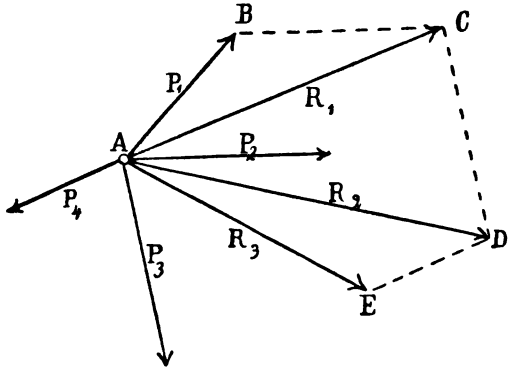
Durch wiederholte Anwendung dieses Kräftedreiecks ist man in der Lage, auch mehr als zwei Kräfte zusammenzusetzen, wie folgendes Beispiel zeigen möge:

Fig. 9.



Die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, an einem Körper in A wirkend, sollen zu einer Einzelkraft vereinigt werden (Fig. 10). P_1 und P_2 = BC lassen sich zusammensetzen zu der Resultante $AC = R_1$, ferner R_1 und $P_3 = CD$ zu $AD = R_2$; dann setzt man R_2 und $P_4 = DE$ zusammen zu $AE = R_3$, so ist R_3 die gesuchte Re-

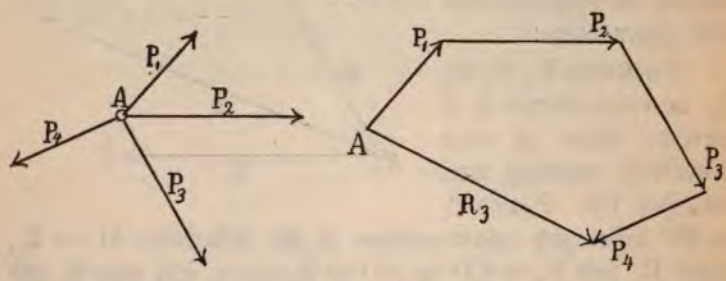
Fig. 10.



sultante, d. h. eine Kraft R_3 von der Größe AE und in der Richtung AE wirkend, würde auf den Bewegungszustand des Körpers dieselbe Wirkung ausüben, wie die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen. Das so gebildete Polygon ABCDE, in welchem $AE = R_3$ die Resultante ist, nennt man das **Kräftepolygon**.

Wie aus der Figur 10 ersichtlich, ist es nicht erforderlich, für jede einzelne Zusammensetzung von je zwei Kräften die zugehörige Resultante zu konstruiren, sondern man erhält dieselbe Figur, wenn man die Kräfte, parallel zu ihrer ursprünglichen

Fig. 11.



Lage aneinanderreiht zu dem offenen Polygon $AP_1P_2P_3P_4$ und AP_4 zieht (Fig. 11); dann ist die Schlußlinie des Polygons AP_4 die gesuchte Resultante R_3.

Diese Betrachtung ergiebt folgenden Satz:

> Die Resultante mehrerer um einen Punkt wirkenden Einzelkräfte wird dargestellt als die Schlußlinie eines aus den gegebenen Kräften gebildeten Kräftepolygons.

Wie aus den Figuren 9 bis 11 ersichtlich, haben die zusammengesetzten Kräfte naturgemäß den Richtungspfeil in demselben Sinne (Umfahrungssinn), während die konstruirte Resultante stets die entgegengesetzte Richtung hat, was bei der Konstruktion wohl zu beachten ist.

b) Zerlegen einer Einzelkraft in mehrere Kräfte.

Ebenso, wie man nach dem Vorstehenden mehrere in einem Punkte wirkende Kräfte zu einer Einzelkraft zusammensetzen kann, kann man auch umgekehrt eine Einzelkraft in mehrere Kräfte zerlegen. Es müssen hierzu die Richtungen der zerlegten

Kräfte gegeben sein, weil sonst unendlich viele Zerlegungen einer Kraft möglich sind Will man z. B. (Fig. 12) die Kraft R in zwei Kräfte P und Q zerlegen, so lassen sich so viel zusammengehörige Kräfte P und Q finden, als man Kräftedreiecke über R konstruiren kann, und deren Anzahl ist eben unendlich.

Fig. 12.

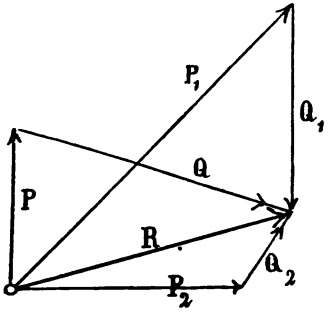
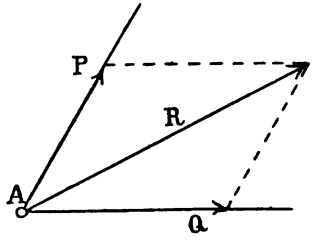


Fig. 13.



Bestimmt man dagegen für die gesuchten Kräfte P und Q die Richtungen, bezieht sie also auf ein Koordinatensystem (Fig. 13), so sind die Komponenten P und Q eindeutig bestimmt.

c) Gleichgewichtsbedingung.

Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Gesammtwirkung auf den Bewegungszustand = 0 ist. Wie wir gesehen haben, wird die Gesammtwirkung dargestellt durch die Resultante oder Schlußlinie des Kräftepolygons. Soll daher Gleichgewicht stattfinden, so muß die Resultante, d. h. die Schlußlinie = 0 sein; wenn aber die Schlußlinie = 0 sein soll, so müssen sich die Kräfte zu einem geschlossenen Polygon (Fig. 14, siehe Seite 10) zusammenreihen lassen (vergl. Fig. 11).

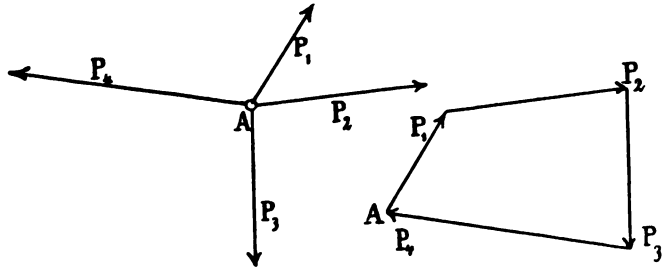
Hieraus folgt das Gesetz:

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so muß das aus ihnen gebildete Kräftepolygon geschlossen sein.

Die Pfeilrichtungen müſſen bei einem geſchloſſenen Polygon ſämmtlich in demſelben Sinne liegen, wie die Figur 14 zeigt.

Auf zwei Kräfte kann ſich natürlich dieſer Satz nicht beziehen, da man aus zwei Kräften kein Polygon konſtruiren kann.

Fig. 14.



Vielmehr ſind zwei Kräfte nur im Gleichgewicht, wenn ſie in derſelben Richtungslinie liegen, aber entgegengeſetzt wirken und gleiche abſolute Werthe haben (Fig. 15).

Fig. 15.

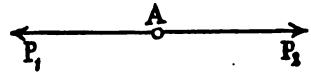
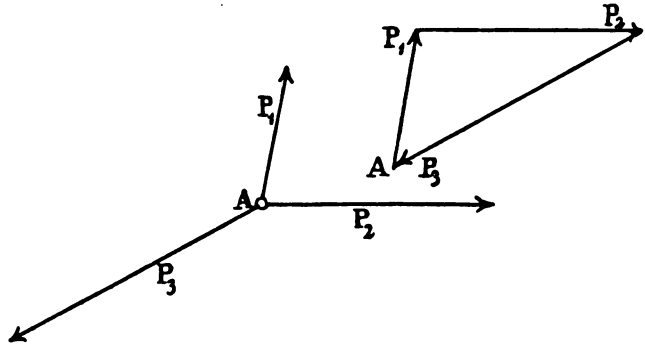


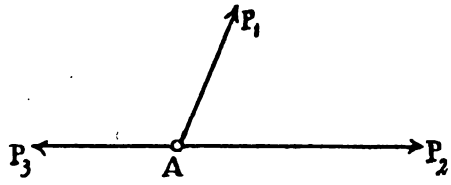
Fig. 16.



Aus drei Kräften läßt sich ein geschlossenes Kräftedreieck nur konstruiren, wenn die Kräfte verschieden gerichtet sind (Fig. 16, siehe Seite 10).

Wenn jedoch von drei Kräften zwei in gleicher Richtungslinie entgegengesetzt wirken (Fig. 17), so läßt sich ein Kräfte-

Fig. 17.

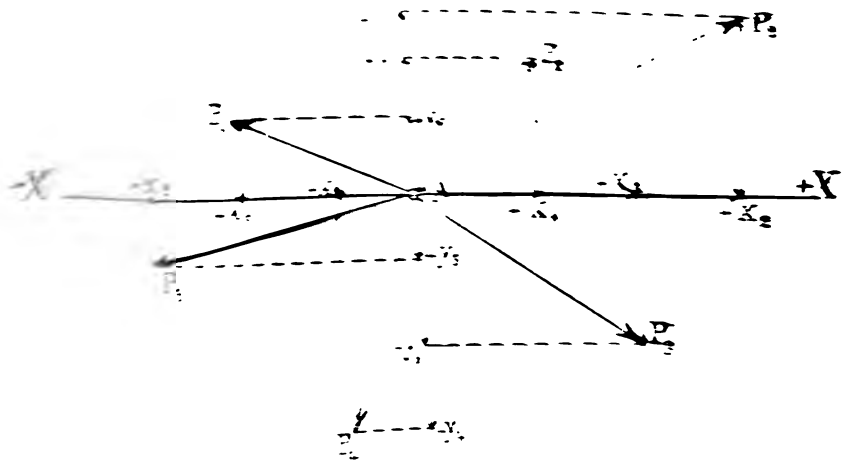


dreieck nicht mehr konstruiren. Bei diesen drei Kräften ist Gleichgewicht nur möglich, wenn $P_1 = 0$ und $P_2 = P_3$ ist.

Wenn mehrere Kräfte in derselben Richtungslinie wirken, (Fig. 6 und 7), so ist, wie wir gesehen, deren Gesammtwirkung auf den Bewegungszustand des Körpers gleich der algebraischen Summe jener Kräfte. Sollen solche Kräfte sich daher das Gleichgewicht halten, so muß ihre Gesammtwirkung d. h. ihre algebraische Summe $= 0$ sein.

Hierauf läßt sich folgende Gleichgewichtsbedingung zurückführen: Gegeben sei eine beliebige Anzahl von Einzelkräften, P_1, $P_2 \ldots P_6$, im Punkte A wirkend (Fig. 18, siehe Seite 12). Man wähle ein beliebiges (schief- oder rechtwinkliges) Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt A und den Achsen $+X$, $-X$, $+Y$, $-Y$ und zerlege nach § 3, b Seite 9 eine jede Kraft P in ihre Komponenten, also P_1 in $+X_1$ und $+Y_1$, P_2 in $+X_2$ und $+Y_2$, P_3 in $+X_3$ und $-Y_3$ u. s. w. Denkt man sich nun die Einzelkräfte P_1, P_2 u. s. w durch diese Komponenten ersetzt (Fig. 19, siehe Seite 13) so wird doch in der Wirkung auf den Punkt A nichts geändert.

Die Komponenten auf jeder Koordinaten-Achse kann man



$$+X_p = +(X_1 + X_2 + X_3)$$
$$-X_p = -(X_4 + X_5 + X_6)$$
$$+Y_p = +(Y_1 + Y_2 + Y_6)$$
$$-Y_p = -(Y_3 + Y_4 + Y_5)$$

Diese vier Kräfte $+X_p$, $-X_p$, $+Y_p$ und $-Y_p$ können

Fig. 19.

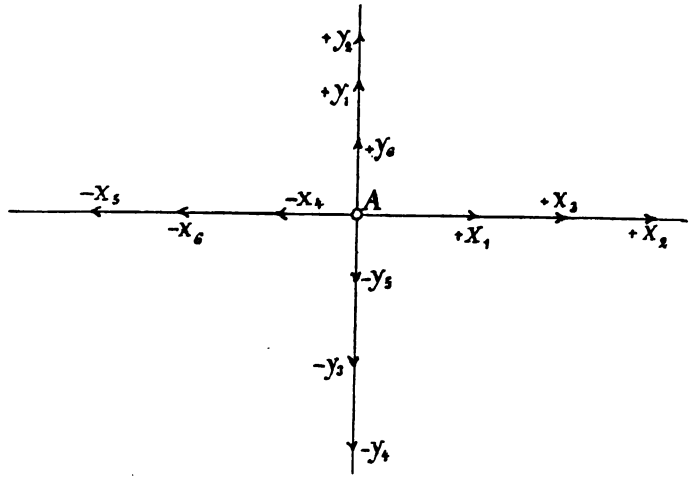
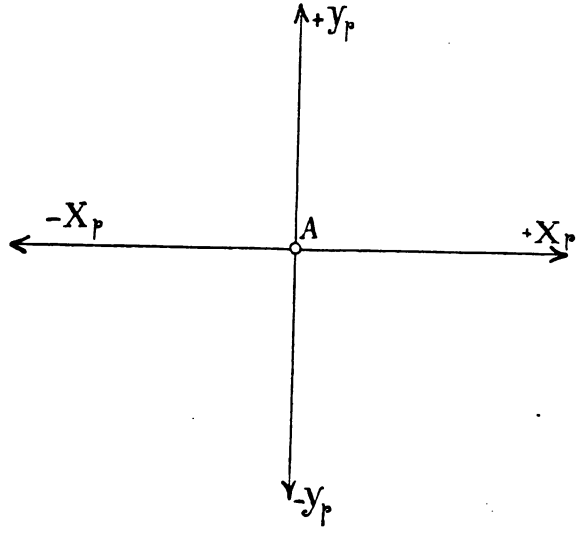


Fig. 20.



wiederum für die einzelnen Komponenten eingesetzt werden (Fig. 20, siehe Seite 13) und müssen dann auf den Punkt A dieselbe Wirkung ausüben, wie die sämmtlichen Komponenten zusammen, also auch wie die Kräfte $P_1, P_2 \ldots . P_6$ zusammen.

Die vier Kräfte $+ X_p, - X_p, + Y_p, - Y_p$ sind im Gleichgewicht, wenn die in derselben Aktionslinie liegenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Kräfte, in derselben Aktionslinie wirkend, sind aber im Gleichgewicht, wenn ihre algebraische Summe = 0 ist. Es ist daher für den Gleichgewichtszustand dieses Systems erforderlich, daß

$$1) \quad + X_p + (- X_p) = 0$$
$$2) \quad + Y_p + (- Y_p) = 0$$

Hieraus resultirt folgender Satz:

> Wenn mehrere Kräfte in einem Punkte wirken, so findet Gleichgewicht unter ihnen statt, wenn die algebraische Summe der Horizontalkomponenten und diejenige der Vertikalkomponenten, bezogen auf ein gemeinschaftliches Koordinatensystem, jede für sich = 0 ist.

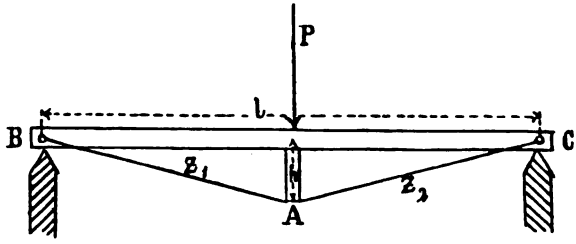
Die bisher besprochenen Sätze über das Zusammensetzen, Zerlegen und den Gleichgewichtszustand von Kräften lassen sich sowohl graphisch, als auch analytisch verwerthen, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

Beispiel:

Ein verspannter Träger (Fig. 21, siehe Seite 15), von der Länge $l = 400$ cm und $h = 50$ cm, sei in der Mitte belastet durch eine Kraft $P = 4000$ kg. Die Kraft P drückt durch den in der Mitte befindlichen Stützklotz auf den Punkt A; von diesem gehen die schmiedeeisernen Zugstangen Z_1 und Z_2 nach den über den Auflagern ruhenden Punkten B und C. Die Kraft P ist bestrebt, den Punkt A nach unten zu bewegen; eine solche Bewegung des Punktes A ist nur möglich, wenn die

Zugstangen dieselbe mitmachen. Letztere werden aber an dieser Bewegung nach abwärts gehindert durch den Balken, welcher die äußeren Endpunkte B und C der Stangen in ihrer Lage festhält. Wenn nun aber der Punkt A sich senkt, während B und C festliegen, so werden die Stangen Z_1 und Z_2 gedehnt, d. h. auf Zug beansprucht. Hierdurch werden in den Zugstangen innere Kräfte erzeugt, welche sich bemühen, die Senkung des Punktes A zu verhindern, d. h. den Punkt A zu heben, so daß

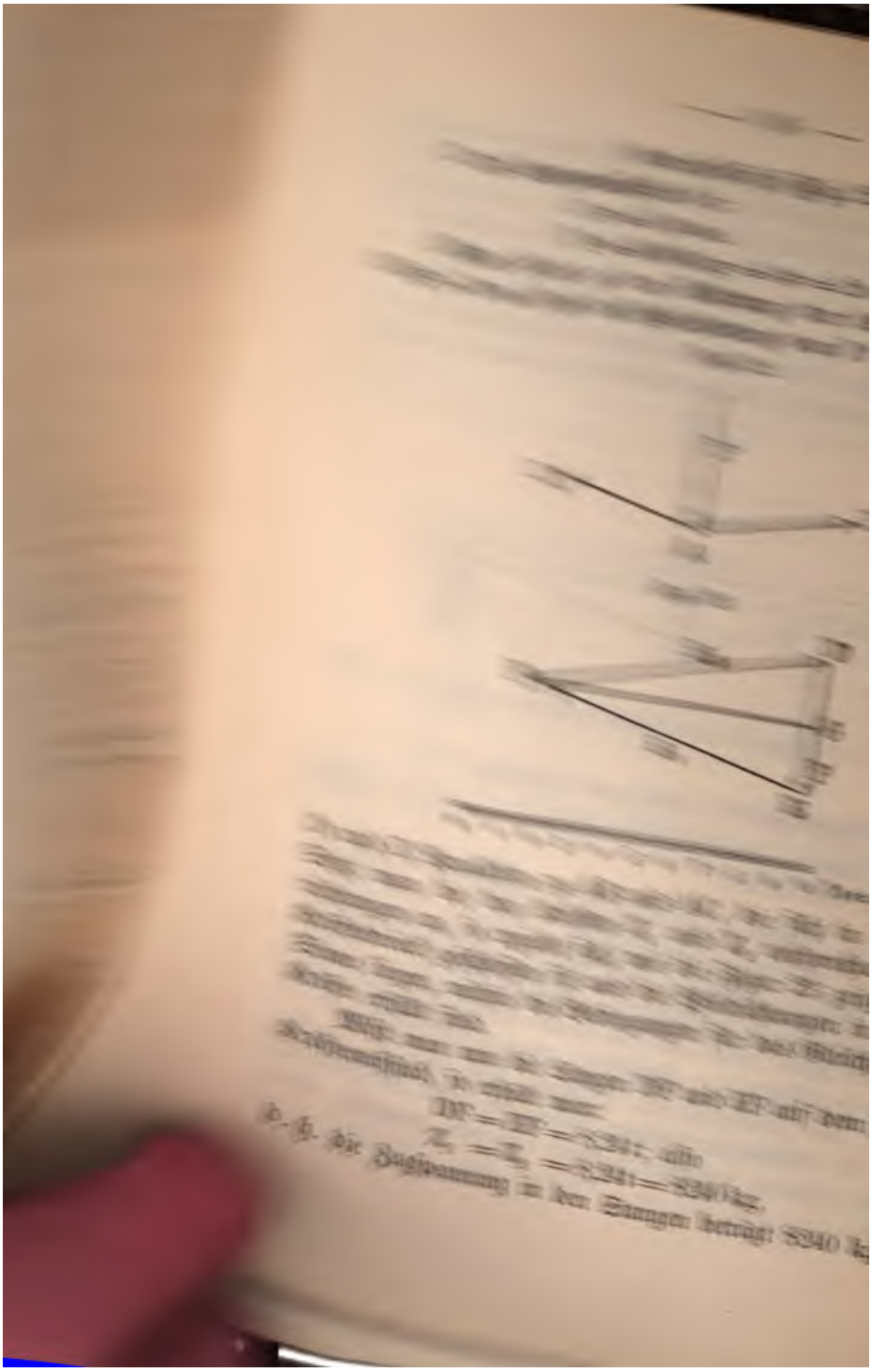
Fig. 21.



also im Punkte A folgende drei Kräfte auftreten (Fig. 22, siehe Seite 16).

1. Die Außen-Kraft P, nach unten drückend,
2. die inneren, widerstehenden Kräfte Z_1 und Z_2, welche nach oben wirken.

Soll eine Bewegung des Punktes A infolge der Belastung durch P nicht eintreten (was doch für die Haltbarkeit des Trägers nothwendig ist), so müssen die drei Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, d. h. die Gesammtwirkung dieser Kräfte muß $= 0$ sein. Dies ist der Fall, wenn das aus ihnen gebildete Kräftedreieck geschlossen ist (siehe § 3, c Seite 10). Von den drei Kräften ist bekannt P, der Intensität und Richtung nach; von Z_1 und Z_2 sind nur die Richtungen bekannt, unbekannt deren Intensitäten, und diese können bestimmt werden entweder graphisch oder analytisch.



Die Größe der Beanspruchung des Balkens BC ermittelt man, wie folgt:

Es fragt sich zunächst, wie derselbe beansprucht wird.

Der Punkt A bewegt sich nach unten; die Punkte B und C, weil über den festen Auflagern ruhend, können sich nach unten nicht bewegen und werden daher das Bestreben haben, sich in der Richtung der Längsachse des Balkens zu nähern. Da sie aber mit dem Balken fest verbunden sind, werden sie versuchen, die Balkenenden gleichfalls nach der Mitte hin zu bewegen, d. h. den Balken in seiner Länge zusammenzudrücken. Der Balken wird also auf Druck beansprucht werden. Die Größe des Druckes erhält man, wenn man in dem Kräftedreieck von F eine Parallele zu der Achse des Balkens zieht; diese Parallele FG steht senkrecht auf DE und halbirt DE, weil das Dreieck gleichschenklig ist.

Mißt man die Länge von FG mit dem obigen Kräftemaßstab, so erhält man die Größe des Druckes in dem Balken:

$$H = F\,G = 8\,t = 8000\ kg.$$

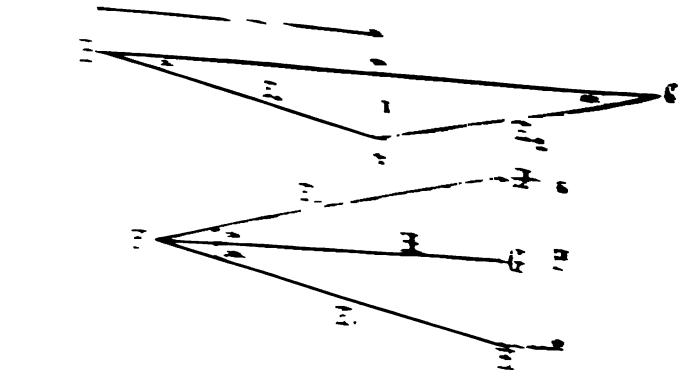
Analytisch (Fig. 24, siehe S. 18):

Man konstruire wieder das Kräftedreieck DEF, aber ohne einen bestimmten Maßstab, wähle also $DE = P$ ganz beliebig, und ziehe durch D und E Parallelen zu AC und AB. Von dem Schnittpunkte F der Parallelen ziehe man eine Parallele FG zu BC. Diese halbirt DE in G, also $DC = EG = \frac{1}{2}P$. Dann ist:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}P}{Z_1}$$

Es ist:

$$\sin\alpha = \frac{h}{AC} = \frac{50}{206} \qquad AB = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{200^2 + 50^2} = 206\ cm$$



[illegible] ist

$$\text{[illegible]} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

es ist also auch:

$$\text{[illegible]} = \frac{h}{\text{[illegible]}\,l} = \frac{50}{20} = \text{[illegible]}$$

also $\text{[illegible]} = \frac{\text{[illegible]}\,P}{H} = \frac{2000}{H}$

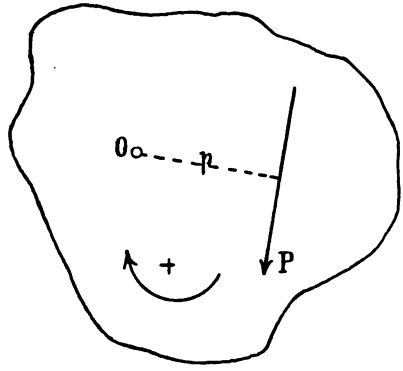
$$H = 4 \cdot 2000 = 8000 \text{ kg}.$$

§ 4.

Kraftmomente.

Wenn eine Kraft P an einem Körper (Fig. 25) angreift, der nicht, wie bisher angenommen, nach jeder Richtung hin frei beweglich, sondern um eine feste Achse O drehbar ist, so wird die Bewegung des Körpers keine fortschreitende, sondern eine

Fig. 25.



drehende (rotirende) sein. Dieses Drehungsbestreben um O wird abhängen von der Größe der Kraft P und von der Entfernung p; und zwar ist die Größe der Drehwirkung $= P \cdot p$, d. h. gleich dem Produkte aus Kraft P mal Hebelarm p.

Dieses Produkt $P \cdot p$ nennt man das statische (Drehungs- oder Kraft-)Moment der Kraft P in Bezug auf eine bestimmte Drehungsachse O.

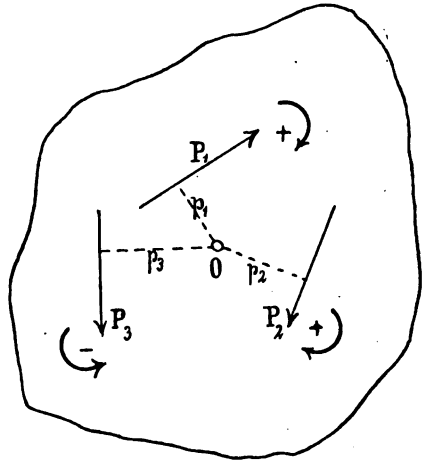
Erfolgt die Drehwirkung im Sinne des Zeigers einer Uhr (also nach rechts herum, wie in Fig. 25), so bezeichnet man das Moment positiv (+); wenn in entgegengesetztem Sinne (also links herum), dann negativ (—).

Greifen nun mehrere Kräfte gleichzeitig einen um O drehbaren Körper an (siehe Fig. 26), so wird jede Kraft für sich eine Drehwirkung auf den Körper ausüben und zwar P_1 mit einem Kraftmoment

$$M_1 = + P_1 \cdot p_1,$$

P_2 mit einem solchen $M_2 = + P_2 \cdot p_2$,
und P_3 mit einem solchen $M_3 = - P_3 \cdot p_3$.

Fig. 26.



Folglich wird die Gesammtwirkung M der Kräfte P_1, P_2 und P_3 gleich sein der algebraischen Summe jener Momente, also

$$M = + P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 - P_3 \cdot p_3.$$

Soll der in Figur 26 angenommene Körper im Gleichgewicht, also in Ruhe sein, so muß die Gesammtdrehwirkung der Kräfte P_1, P_2 und P_3, d. h. die algebraische Summe der Momente $= 0$ sein; es findet also Gleichgewicht statt, wenn

$$+ P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 - P_3 \cdot p_3 = 0 \text{ ist.}$$

Hierauf beruht auch das Hebelgesetz:

Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die statischen Momente der Kraft und Last in Bezug auf die Drehungsachse einander gleich, aber dem Sinne nach entgegengesetzt wirkend sind.

Daraus folgt, daß bei einem zweiarmigen Hebel (Fig. 27) die Kraft und Last gleich gerichtet und bei einem einarmigen Hebel (Fig. 28) entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Fig. 27.

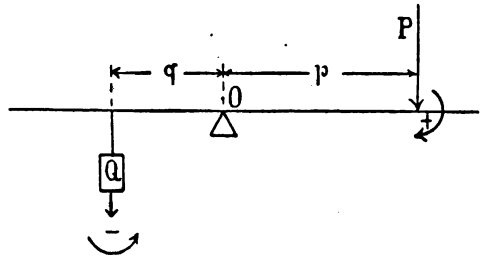
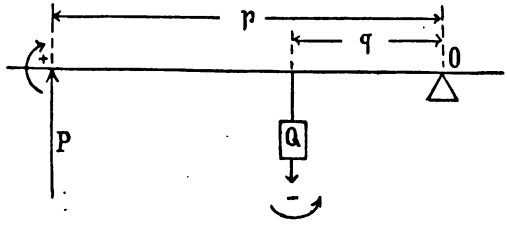


Fig. 28.



Bezeichnet man die Größe der Kraft P in kg, die Länge des Armes p in cm, so ist die Größe des zugehörigen Momentes $P \cdot p$ in Centimeter-Kilogramm (cmkg) anzugeben; also wenn $P = 20$ kg, $p = 100$ cm, so ist $P \cdot p = 2000$ cmkg; oder wenn $P = 30$ kg, $p = 10$ m, so ist $P \cdot p = 300$ mkg.

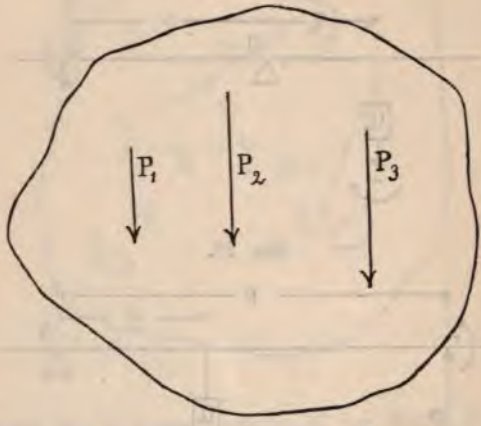
§ 5.

Verhalten paralleler Kräfte.

a. Zusammensetzen zu einer Einzelkraft.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte, die verschiedene Aktionslinien haben, aber parallel zu einander sind, an einem frei beweglichen Körper wirken (Fig. 29), so ist deren Gesammtwirkung auf den Bewegungszustand des Körpers, d. h. die Resultante der Kräfte gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte und parallel denselben, unter der Voraussetzung, daß eine Drehung

Fig. 29.

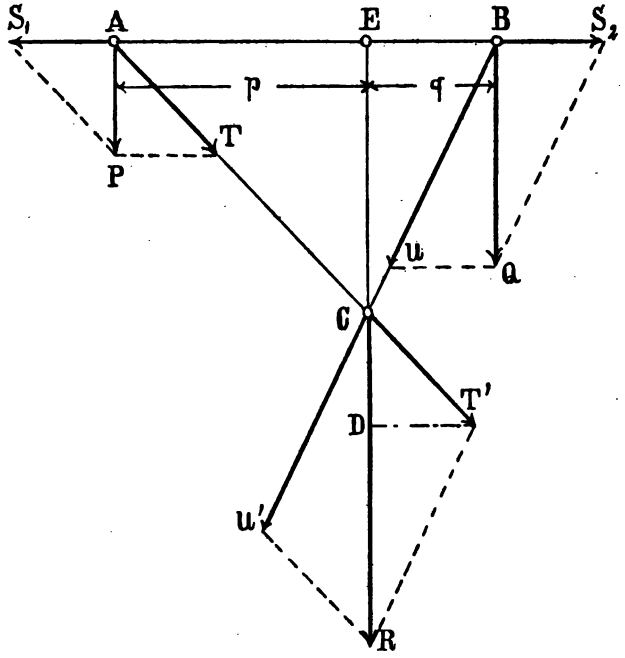


des Körpers bei der Bewegung ausgeschlossen ist. Es fragt sich, wo muß diese Resultante den Körper angreifen, damit ihre Wirkung auf den Bewegungszustand und auf die Bewegungsrichtung des Körpers dieselbe sei, wie diejenige der Einzelkräfte zusammen, d. h. es fragt sich, welches ist die Lage der Resultante? Diese findet man wie folgt:

Es seien gegeben die parallelen Kräfte P und Q, den Körper angreifend in den Punkten A und B (Fig. 30, siehe Seite 23). Man verbinde die Angriffspunkte A und B durch

eine Gerade, und füge in A und B gleich große, aber in der Richtung von AB entgegengesetzt wirkende Kräfte S_1 und S_2 hinzu. Diese Kräfte S_1 und S_2 werden sich in ihrer Wirkung aufheben, also auf den Bewegungszustand des Körpers keinen Einfluß haben.

Fig. 30.



P und Q lassen sich in je zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine S_1 bezw. S_2 sei. Die andere Komponente ist dann nach dem Parallelogramm der Kräfte bestimmt, als T bezw. U. Man kann also statt der Kräfte P und Q die vier Kräfte S_1, T, S_2, U setzen; diese müssen zusammen dieselbe Wirkung auf den Körper ausüben, wie P und Q. S_1 und S_2 heben

sich aber in ihren Wirkungen auf, d. h. ihre Gesammtwirkung ist = 0, also müssen die Kräfte T und U zusammen dieselbe Wirkung haben, wie P und Q zusammen.

Nach § 2 kann man Einzelkräfte in ihrer Richtung verschieben, ohne den Bewegungszustand des Körpers zu stören. Wenn C der Schnittpunkt der Aktionslinien von T und U ist, so kann man also die Kräfte T und U in die Lage T′ bezw. U′ bringen. Diese Kräfte T′ und U′ lassen sich wieder nach dem Parallelogramm der Kräfte zu der Resultante R zusammensetzen, deren Wirkung gleich derjenigen von T′ und U′ ist, also auch gleich derjenigen von T und U, folglich auch gleich derjenigen von P und Q zusammen. Es ist mithin R die gesuchte Resultante, die man ihrerseits wieder beliebig in ihrer Richtung verschieben kann. Daß R parallel zu P und Q ist, bedarf keines besonderen Beweises. Vielmehr ist zu beweisen, daß R wirklich $= P + Q$ ist.

Man ziehe T′D parallel zu AB, so ist

$$\triangle APT \cong CDT', \text{ also } CD = P,$$
$$\triangle S_2BQ \cong T'DR, \text{ also } DR = Q,$$

folglich ist

$$R = CD + DR = P + Q,$$

d. h. R ist die gesuchte Resultante.

Um die Lage der Resultante aus dieser Konstruktion analytisch zu ermitteln, verfährt man folgendermaßen:

Man verlängere RC bis E, setze $AE = p$, $BE = q$, so ist: $\triangle S_1AP \sim AEC$, also verhält sich

$$\frac{S_1}{p} = \frac{P}{\overline{EC}} \text{ oder}$$
$$S_1 \cdot \overline{EC} = P \cdot p$$

Ferner ist $\triangle S_2BQ \sim BEC$, also

$$\frac{S_2}{q} = \frac{Q}{\overline{EC}} \text{ oder}$$
$$S_2 \cdot \overline{EC} = Q \cdot q.$$

Nun ist $S_1 = S_2$, also auch

$$S_1 \cdot \overline{EC} = S_2 \cdot \overline{EC}, \text{ folglich auch:}$$

$$P \cdot p = Q \cdot q \text{ oder}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$ d. h. die Abstände p und q der Einzelkräfte von der Resultante R verhalten sich umgekehrt, wie die Kräfte selbst. Durch diese Gleichung ist die Lage des Punktes E, also auch die Lage der Resultante R bestimmt. Und zwar folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{P+Q}{Q} = \frac{p+q}{p} \text{ und } \frac{P+Q}{P} = \frac{p+q}{q}$$

$$p = \frac{(p+q)\,Q}{P+Q}, \text{ und}$$

$$q = \frac{(p+q)\,P}{P+Q},$$

worin $p + q = \overline{AB}$, ferner P und Q bekannt sind.

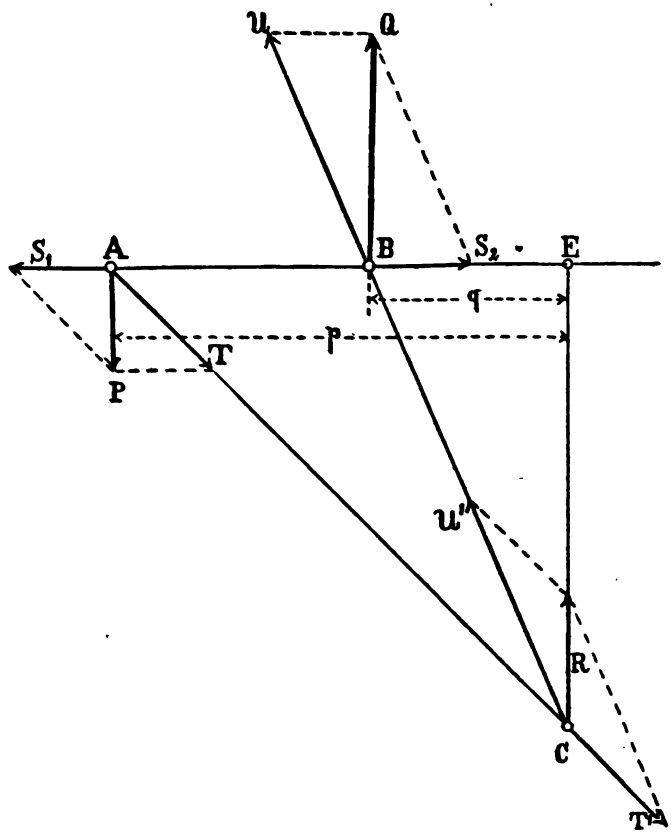
Es ist mithin die Lage der Resultante abhängig von der Entfernung AB der beiden Einzelkräfte und von der Größe der letzteren.

Wenn zwei Kräfte parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 31, siehe S. 26), so ist das Verfahren für die Bestimmung der Lage der Resultante analog. Die Größe der letzteren ist natürlich auch gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte, also hier $= Q - P$.

Wenn jedoch in Figur 31 der Größe nach $P = Q$ ist, so werden T und U parallel, ihre Richtungslinien werden sich nicht schneiden, daher die letzte Methode nicht mehr anwendbar. Ueber diesen Fall siehe § 6. —

Für mehr als zwei parallele Kräfte findet man die Lage der Resultante durch wiederholte Anwendung des vorigen Verfahrens, indem man zunächst zwei Kräfte zusammensetzt, die Resultante R_1 dieser beiden Kräfte mit der nächsten Einzelkraft zu einer Resultante R_2 vereinigt (ähnlich wie dies in Fig. 10 geschehen) und so fortfährt, bis alle Kräfte zusammengesetzt sind.

Fig. 31.

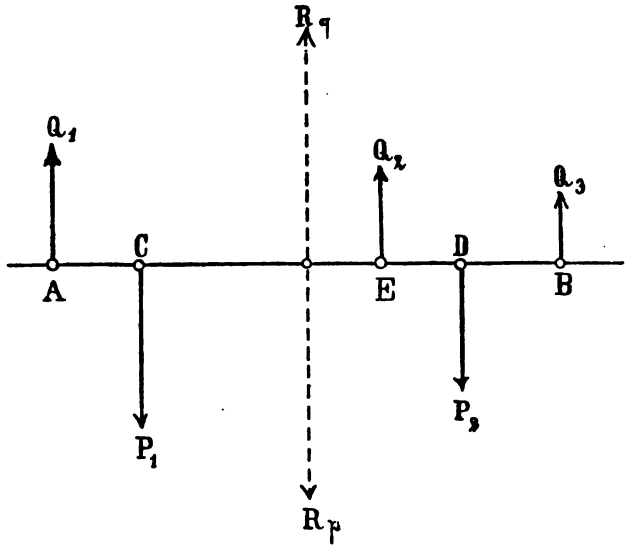


b. Gleichgewichtsbedingung.

An einem Körper (Fig. 32, siehe Seite 27) greifen in den Punkten A, B, C, D, E, fünf beliebige parallele Kräfte P_1, P_2, Q_1, Q_2 und Q_3 an. Vereinigt man nach der auf Seite 23 gegebenen Methode die nach oben gerichteten Kräfte Q zu der

Reſultante R_q und die nach unten gerichteten Kräfte P zu der Reſultante R_p, ſo werden die Kräfte R_q und R_p auf den Körper dieſelbe Wirkung ausüben, wie die Einzelkräfte zuſammengenommen. Dieſe Kräfte R_q und R_p halten ſich das Gleichgewicht, wenn ſie in derſelben Aktionslinie liegen, gleiche Werthe haben und entgegengeſetzt gerichtet ſind. Für den Gleich-

Fig. 32.



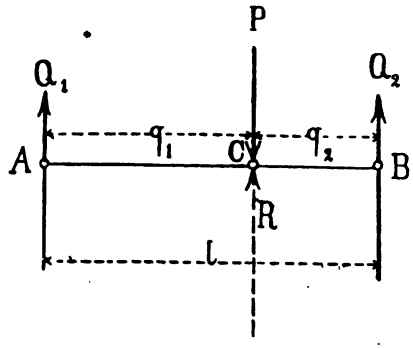
gewichtszuſtand paralleler Kräfte ſind daher zwei Bedingungen erforderlich:

1) Die Reſultante der nach oben gerichteten Kräfte muß gleich derjenigen der nach unten gerichteten ſein, d. h. die algebraiſche Summe der Einzelkräfte muß = 0 ſein.
2) Die Reſultanten müſſen in derſelben Aktionslinie liegen.

Die letztere Bedingung ist, wie aus Figur 30 ersichtlich, abhängig von der Lage der Einzelkräfte und von der Größe derselben.

In der Statik der Baukonstruktionen wird in der Regel die Lage und Größe der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte und damit also auch die Lage und Größe der Resultante auf dieser Seite gegeben sein, während von den nach der entgegengesetzten Seite wirkenden Kräften die Lage bekannt, aber die Größe als unbekannt zu ermitteln ist.

Fig. 33.



Wir betrachten zunächst den in Fig. 33 dargestellten Fall: Die Kraft P sei der Größe nach, in C wirkend, gegeben; die Kräfte Q_1 und Q_2, in A und B wirkend, sollen der Kraft P das Gleichgewicht halten. Von Q_1 und Q_2 ist also die Lage gegeben, zu suchen die Größe.

Wir wissen, daß für den Gleichgewichtszustand $P = Q_1 + Q_2$ und die Resultante R der Kräfte Q_1 und Q_2 gleich P, aber entgegengesetzt wirkend sein muß; folglich ist die Lage von R bekannt. Nach § 5a Seite 25 gilt für Q_1 und Q_2 folgende Gleichung:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{q_1 + q_2}{q_2}$$

Es ist aber:

$$Q_1 + Q_2 = P \text{ und } q_1 + q_2 = l$$

$$\text{also: } \frac{P}{Q_1} = \frac{l}{q_2} \text{ oder}$$

$$P \cdot q_2 = Q_1 \cdot l.$$

$P \cdot q_2$ ist das Kraftmoment von P gegen den Punkt B am Hebelarm q_2, und $Q_1 \cdot l$ das Kraftmoment der Kraft Q_1 gegen den Punkt B am Hebelarm l. Wenn man die Verbindungslinie AB als eine starre auffaßt und beweglich um den Punkt B, so erhält man einen einarmigen Hebel mit dem Drehpunkt B, an dem die Kräfte P und Q_1 wirken, und dieser Hebel ist im Gleichgewicht, sobald für ihn die obige Gleichung

$$P \cdot q_2 = Q_1 \cdot l$$

erfüllt wird. Man kann deshalb bei der Bestimmung von Q_1 von der Annahme ausgehen, die Linie AB sei ein Hebel mit dem Drehpunkt B; für diesen Hebel stelle man die Momentengleichung:

$$P \cdot q_2 = Q_1 \cdot l$$

auf und berechne daraus

$$Q_1 = \frac{P \cdot q_2}{l}$$

Zur Bestimmuug von Q_2 nimmt man die Linie AB drehbar um den Punkt A an, und es lautet dann die Momentengleichung:

$$P \cdot q_1 = Q_2 \cdot l \text{ oder}$$

$$Q_2 = \frac{P \cdot q_1}{l}$$

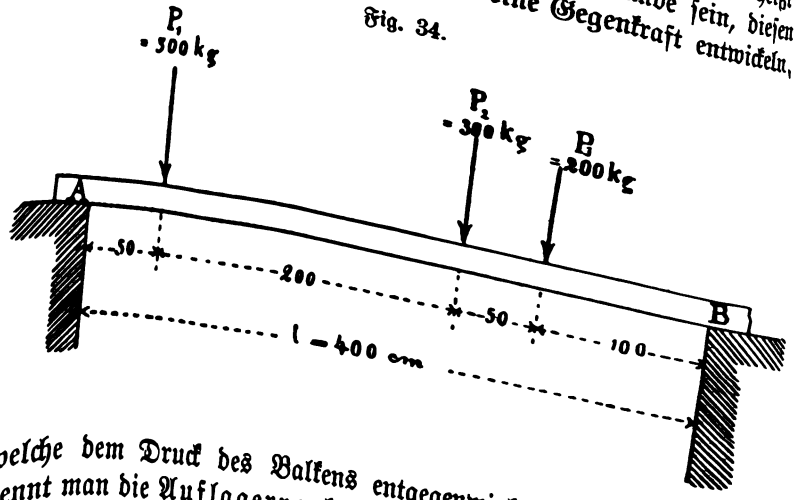
Dasselbe Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn statt einer Kraft P mehrere nach unten wirkende Kräfte P gegeben sind.

Beispiel:

Ein Balken, an beiden Enden frei aufliegend, sei belastet mit $P_1 = 500$ kg, $P_2 = 300$ kg und $P_3 = 200$ kg (Fig. 34). Die freitragende Länge des Balkens sei $l = 400$ cm.

Die Lasten, die der Balken trägt, werden einen Druck ausüben müssen auf die Endunterstützungen. Dieser Druck heißt Auflagerdruck. Die Auflager müssen im Stande sein, diesen Druck auszuhalten; sie werden daher eine Gegenkraft entwickeln,

Fig. 34.



welche dem Druck des Balkens entgegenwirkt: diese Gegenkraft nennt man die Auflagerreaktion. Der Auflagerdruck, welcher herrührt von der Belastung des Balkens, daher nach unten wirkt, muß gleich sein der in der Unterstützung erzeugten Auflagerreaktion, welche nach oben wirkt.

Denkt man statt der Endunterstützungen (Auflager) die diesen entsprechenden Auflagerreaktionen R_1 und R_2 an dem Balken als Außenkräfte wirkend, so wird doch an dem Gleichgewichtszustand des Balkens nichts geändert, und man erhält die auf Seite 31 stehende schematische Darstellung (Fig. 35). In diesem System wirken die Kräfte P_1, P_2 und P_3 als gegebene

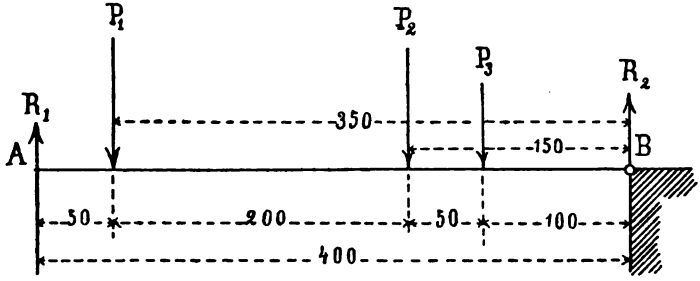
Kräfte; R_1 und R_2 sind der Größe nach zu bestimmen. Soll Gleichgewicht in dem System sein, so muß zunächst

$$P_1 + P_2 + P_3 = R_1 + R_2$$

sein. Die Größe von R_1 und R_2 bestimmt man dann nach Vorstehendem, wie folgt:

Man denke statt der Kraft R_2 wieder die feste Unterstützung und auf dieser den Balken drehbar beweglich um den Punkt B. Man erhält dann einen einarmigen Hebel, an dem die Kräfte R_1, P_1, P_2 und P_3 wirken.

Fig. 35.



Die Wirkungsweise dieser Kräfte gegen den Punkt B ist folgende: Die Kraft R_1 hat das Bestreben, den Balken um B nach oben zu drehen, mit dem Kraftmoment $R_1 \cdot 400$, und würde dies auch thun, wenn ihr nicht entgegenwirkten die Momente von P_1, P_2 und P_3, welche die Tendenz haben, den Balken um den Punkt B nach unten zu drehen.

Das Kraftmoment von P_1 gegen den Punkt B ist $= P_1 \cdot 350$; dasjenige von P_2 ist $= P_2 \cdot 150$, und das Moment von P_3 ist $= P_3 \cdot 100$. Soll Gleichgewicht sein, so müssen die Wirkungen der Momente gegen den Punkt B sich aufheben, d. h. es muß sein:

$$R_1 \cdot 400 = P_1 \cdot 350 + P_2 \cdot 150 + P_3 \cdot 100.$$

[illegible]

[illegible] und ent-
[illegible] siehe
[illegible] der
[illegible] anwendbar.
[illegible] man
[illegible] Um dies zu
[illegible] P_1 und P_2 als be-
[illegible] genannt.

Fig. 36.

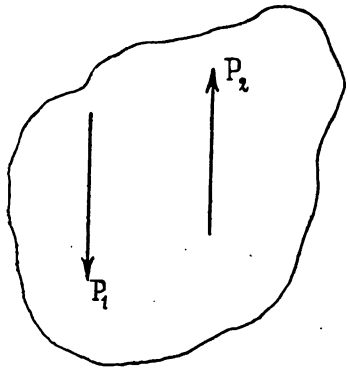
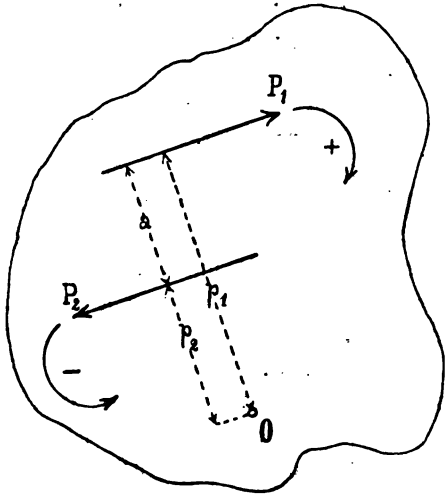


Fig. 37.



Die Wirkung eines solchen Kräftepaares kann nur eine drehende Bewegung sein, da eine fortschreitende Bewegung nicht möglich und Gleichgewicht nicht stattfinden kann.

Wie äußert sich diese Drehungswirkung, bezw. wie groß ist dieselbe?

Denken wir uns das Kräftepaar P_1, P_2 (wo $P_1 = P_2$) um einen beliebigen Punkt O des Körpers wirkend, so ist das Kraft- oder statische Moment, mit welchem P_1 allein den Körper um den Punkt O nach rechts herum zu drehen sucht:

$$M_1 = + P_1 \cdot p_1 \text{ (siehe Fig. 37 S. 33).}$$

P_2 sucht den Körper um O nach links herum zu drehen und zwar mit einem Moment

$$M_2 = - P_2 \cdot p_2.$$

Die gesammte Drehwirkung M der Kräfte P_1 und P_2 um den Punkt O, d. h. die Wirkung des Kräftepaares gegen den Punkt O muß mithin gleich der algebraischen Summe beider Momente sein, d. h.:

$$M = P_1 \cdot p_1 + (- P_2 \cdot p_2)$$
$$= P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$$

und da $P_1 = P_2$, so ist

$$M = P_1 (p_1 - p_2)$$
$$= P_1 \cdot a.$$

Wie aus dieser Gleichung ersichtlich, ist die Wirkung des Kräftepaares unabhängig von dem Abstande p_1 bezw. p_2 von dem Drehpunkte, hängt vielmehr nur ab von der gegenseitigen Entfernung a der beiden Kräfte P_1 und P_2, wie auch das Drehungszentrum O liegen mag. Die Entfernung a nennt man den Arm des Kräftepaares.

Hieraus folgt der Satz:

Das statische Moment eines Kräftepaares in Bezug auf irgend einen Punkt ist stets gleich dem Produkt aus der Kraft und dem Arm des Kräftepaares.

II. Abschnitt.

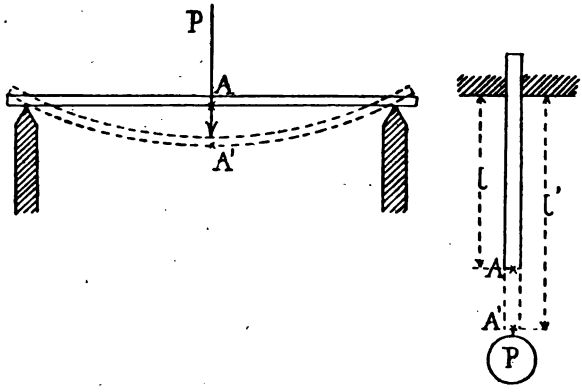
Festigkeit der Materialien.

§ 7.

Aufgabe der Festigkeitslehre und die verschiedenen Arten der Festigkeit.

Wie wir bereits am Schlusse des § 1 gesehen haben, handelt es sich bei der Festigkeitslehre um den Gleichgewichtszustand zwischen der Wirkung der äußeren Kräfte und derjenigen der

Fig. 38.



durch diese erzeugten inneren Gegenkraft, dem inneren Widerstande. Diese innere Kraft bezeichnet man als Spannung. Die Summe aller äußeren auf einen Körper wirkenden Kräfte nennt man die Belastung desselben.

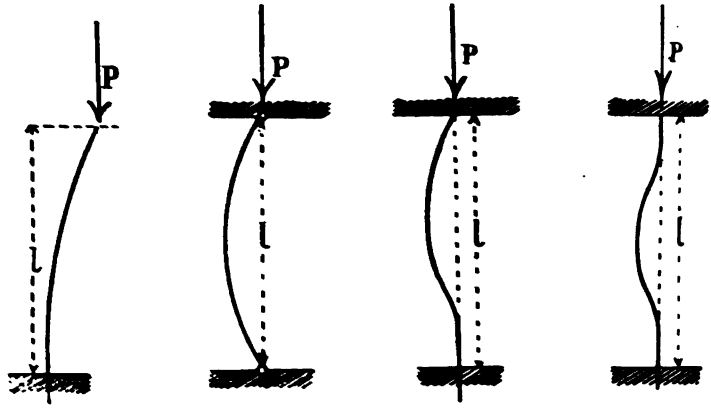
So lange die äußeren und inneren Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, wird auch hier, wie im § 1 nachgewiesen, die Gesammtwirkung der Kräfte Bewegung erzeugen.

Wenn z. B. ein an den Enden unterstützter Stab, oder ein an einem Ende aufgehängtes Gummiband (Fig. 38) unbelastet sind, wird die innere Spannung natürlich $= 0$ sein.

4. Beide Enden sind fest eingeklemmt (Fig. 46).

Die zulässige Beanspruchung P ist in den vier Fällen verschieden, und zwar ist:

Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.



für Fall 1: $P = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{n}\cdot\frac{J\cdot E}{l^2}$

" " 2: $P = \frac{\pi^2}{n}\cdot\frac{J\cdot E}{l^2}$

" " 3: $P = 2\frac{\pi^2}{n}\cdot\frac{J\cdot E}{l^2}$

" " 4: $P = 4\frac{\pi^2}{n}\cdot\frac{J\cdot E}{l^2}$

wo J = Trägheitsmoment (siehe Seite 76),
E = Elastizitätsmodul,
n = Sicherheitskoeffizient,
für Holz = 8
für Eisen = 6.

Dies ist die sogenannte Euler'sche Formel.

Je nach der Wirkungsweise der äußeren Kräfte unterscheidet man vier Fälle:

1. Beanspruchung auf Zerreißen bezw. Zerdrücken, Zug- bezw. Druckfestigkeit;
2. Beanspruchung auf Trennung der Faserschichten, Schub- oder Scheerfestigkeit;
3. Beanspruchung auf Zerbrechen, in Folge Durchbiegung, Biegungsfestigkeit;
4. Beanspruchung auf Zerdrehen eines Körpers um seine Längsachse, Torsionsfestigkeit.

Die letztere Art der Beanspruchung dürfte im Holzbrückenbau wohl kaum vorkommen, wir können daher in Folgendem von dieser absehen.

§ 8.

Zug- und Druckfestigkeit.

Ein Körper ist auf Zugfestigkeit beansprucht, wenn die angreifende Kraft P ihn in seiner Längenrichtung auszudehnen

Fig. 39.

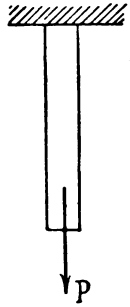
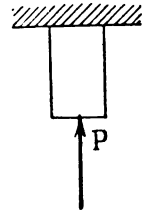
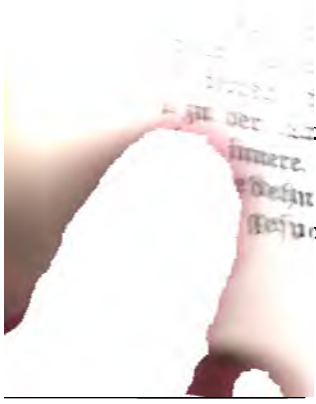


Fig. 40.



sucht (Fig. 39); ist dagegen die Kraft P gerade entgegengesetzt gerichtet (Fig. 40), so beansprucht sie den Körper auf Druckfestigkeit.



Denkt man sich den gedehnten Stab im Querschnitt f' durchschnitten, so würde die Verlängerung a' des oberen Stabstückes dann beibehalten werden, wenn man an jeder Faser eine äußere Kraft p, nach unten wirkend, anbrächte, die ebenso groß ist, wie die innere Spannung der Faser vor dem Durchschneiden.

Die Gesammtsumme dieser unendlich vielen kleinen Einzelkräfte p muß = P sein, weil anders ein Gleichgewichtszustand nicht möglich ist. Man kann annehmen, daß durch die Last P alle Fasern gleichmäßig gespannt werden; es müssen mithin die Einzelkräfte p auf dem ganzen Querschnitt f' sämmtlich gleich groß sein.

Bezeichnet man daher die Summe der Einzelkräfte p, welche in einer Flächeneinheit (qcm, qmm) wirken, mit k, so giebt k die Größe der Faserspannungen in der Flächeneinheit an. Hat der Querschnitt eine Größe von f Flächeneinheiten, z. B. qcm, so wird die Gesammtspannung in diesem Querschnitt = f · k sein. Diese Gesammtspannung muß aber, wie wir gesehen, des Gleichgewichtes halber = P sein.

Wir erhalten mithin für die Beanspruchung eines Stabes auf Zugfestigkeit die Gleichung:

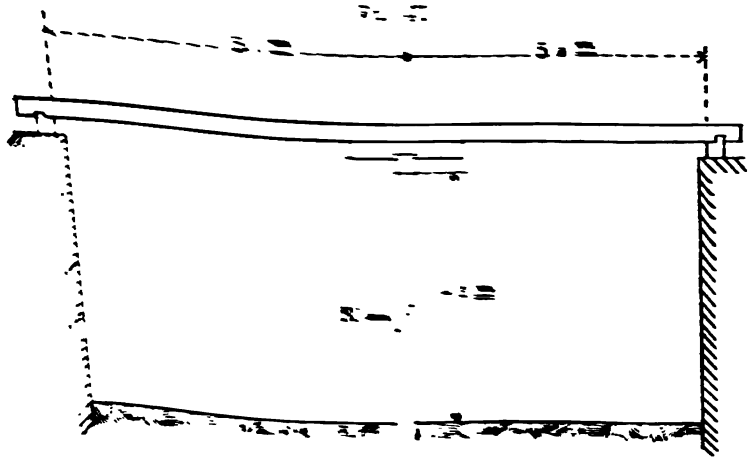
$$P = f \cdot k.$$

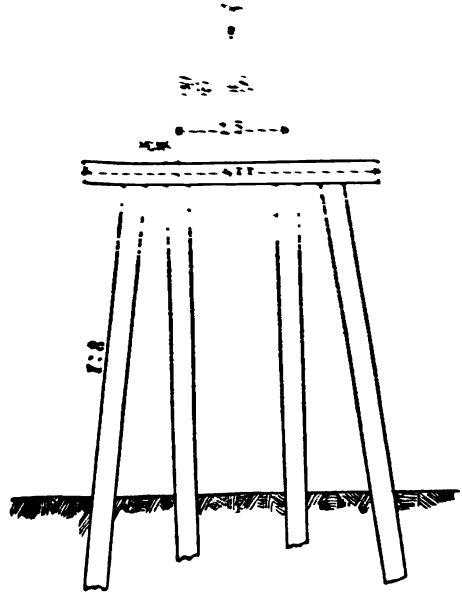
Hieraus folgt: die durch die Kraft P erzeugte Faserspannung pro Flächeneinheit beträgt:

$$k = \frac{P}{f}.$$

Die Spannung k wächst, wie die Gleichung ergiebt, proportional mit P; d. h. wird P größer, so wird auch k größer. Vergrößert man die Last P immer mehr und mehr, bis schließlich der Stab zerreißt (dieses Stadium trete bei einer Last = P_z ein), so kann man aus der Gleichung

$$k = \frac{P_z}{f}$$





nennt die Spannung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht, den Zug-Tragmodul des Materials. Derselbe beträgt z. B. für Schmiedeeisen 1400 kg pro qcm und für Kiefernholz 256 kg pro qcm.

Wird diese Grenze durch weitere Belastung überschritten, so tritt nicht etwa sofort ein Zerreißen des Materials ein, sondern dasselbe wird sich weiter ausdehnen, aber nach Entfernung der äußeren Kräfte nicht wieder in seine ursprüngliche Form zurückkehren, vielmehr eine bleibende Dehnung behalten. Die bleibende Dehnung wird zunehmen, bis der Stab bei genügender Belastung zerreißt. Da eine bleibende Formveränderung (Dehnung) nur möglich ist, indem der innere Zusammenhang des Materials sich lockert, so wird dadurch auch die Festigkeit des Materials beeinträchtigt, und es darf daher die Beanspruchung eines Konstruktionstheiles nie die Elastizitätsgrenze überschreiten.

In der Baupraxis wird man das Material auch nicht einmal bis zu dieser Grenze beanspruchen, sondern nur bis zu einer gewissen Höhe unterhalb derselben. Diese Höhe der Beanspruchung eines Materials, welche als die zulässige Beanspruchung bezeichnet wird, hat sich durch die Praxis ergeben und ist für die Berechnung der Tragfähigkeit von Konstruktionstheilen maßgebend. Die so gewonnenen Werthe für k sind in M. T. Tab. I, Kol. 5 zusammengestellt und betragen z. B. für Schmiedeeisen $k = 700$ kg pro qcm und für Kiefernholz, in der Richtung der Fasern beansprucht, $k = 70$ kg pro qcm.

Das Verhältniß der Bruchbelastung zu der zulässigen Zug-Beanspruchung nennt man den Zug-Sicherheitskoeffizienten. Derselbe beträgt z. B. für Schmiedeeisen

$$\frac{4000}{700} = 5{,}7$$

und für Kiefernholz, in der Richtung der Fasern,

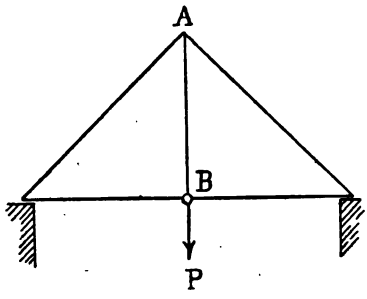
$$\frac{1130}{70} = 16,$$

d. h. ein Konstruktionstheil aus Kiefernholz, welcher in der Richtung der Fasern gezogen wird, kann, ehe ein Zerreißen eintritt, eine 16 mal größere Belastung aufnehmen, als man bei der Berechnung annimmt.

Beispiele:

1. Die hölzerne Hängesäule AB eines Hängewerkes (Fig. 42) habe eine Last P = 60 t zu tragen: wie stark muß dieselbe sein?

Fig. 42.



Die Säule wird auf Zug beansprucht, denn der Punkt B hat das Bestreben, sich durch die Belastung zu senken, während A durch die Streben in seiner Lage festgehalten wird; folglich ist der erforderliche Querschnitt der Säule

$$f = \frac{P}{k} = \frac{60000}{70} = 857 \text{ qcm}$$

$$= {}^{30}/_{28} \text{ cm}.$$

2. Die schmiedeeiserne Zugstange eines verspannten Tragbalkens (Figur 21, Seite 15) sei beansprucht mit

$$P = 8240 \text{ kg};$$

wie groß ist der erforderliche Durchmesser der Stange?

$$f = \frac{P}{k} = \frac{8240}{700} = 11{,}8 \text{ qcm}$$

$$11{,}8 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$d \sim 3{,}9 \text{ cm} = 39 \text{ mm}.$$

Die Größe der Dehnung.

Wenn ein Stab von der Länge l durch eine Last P um v Längeneinheiten gedehnt wird, so beträgt die Dehnung für eine Längeneinheit des Stabes

$$\varepsilon = \frac{v}{l}.$$

Da man v durch Messung ermitteln kann, so ist ε für die Belastung P bestimmt.

Ebenso ist die der Last P entsprechende Faserspannung k pro Flächeneinheit bekannt, nach der Formel

$$k = \frac{P}{f};$$

folglich läßt sich für eine gegebene Belastung P das derselben entsprechende Verhältniß zwischen der Faserspannung pro Flächeneinheit und der Faserdehnung pro Längeneinheit, d. h. der Werth $\frac{k}{\varepsilon}$ bestimmen.

Es ist nun durch Versuche nachgewiesen, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze die Längenänderung eines Stabes proportional ist der Spannung, d. h. daß die Dehnung mit der Belastung gleichmäßig zunimmt. Es wird daher für ein bestimmtes Material der Werth $\frac{k}{\varepsilon}$ bei jeder Belastung innerhalb der Elastizitätsgrenze einen konstanten Werth haben, der sich, wie oben angegeben, rechnerisch ermitteln läßt. Dieses Verhältniß $\frac{k}{\varepsilon}$ nennt man den Elastizitätsmodul E des Materials, so daß

$$E = \frac{k}{\varepsilon}.$$

Für die verschiedenen Materialien sind die Werthe von E in M. T. Tab. I, Kol. 7 enthalten.

[illegible] Fig. 52,
[illegible] so
[illegible] dem Balken,
[illegible] dem Balken entlang

b. Druckfestigkeit.

Die Entwickelungen für die Zugfestigkeit gelten auch sinngemäß für die Druckfestigkeit, wenn man die Kräfte entgegengesetzt denen des Zuges gerichtet denkt.

Auch hierfür sind die betreffenden Koeffizienten der verschiedenen Materialien durch Versuche ermittelt und in M. T. Tab. I, Kol. 4 und 6 zusammengestellt. Die dort gegebenen Werthe sind nur anwendbar, wenn das Verhältniß der Länge l des Stabes zu seiner kleinsten Querschnittsdimension b bezw. d, einen gewissen Werth nicht überschreitet (siehe Zerknickungsfestigkeit). Die Formel für die Druckfestigkeit ist analog derjenigen für Zugfestigkeit:

$$P = f \cdot k \text{ und } f = \frac{P}{k}.$$

c. Zerknickungsfestigkeit.

Wenn ein Stab, dessen Länge l ein gewisses Vielfaches seiner kleinsten Querschnittsdimension (b für den rechteckigen, und d für den runden Querschnitt) überschreitet, in der Längsachse gedrückt wird, so wird derselbe gleichzeitig auf Druck und Biegung beansprucht und mithin eher zerknickt als zerdrückt werden; man sagt: der Stab wird auf Zerknickungsfestigkeit beansprucht.

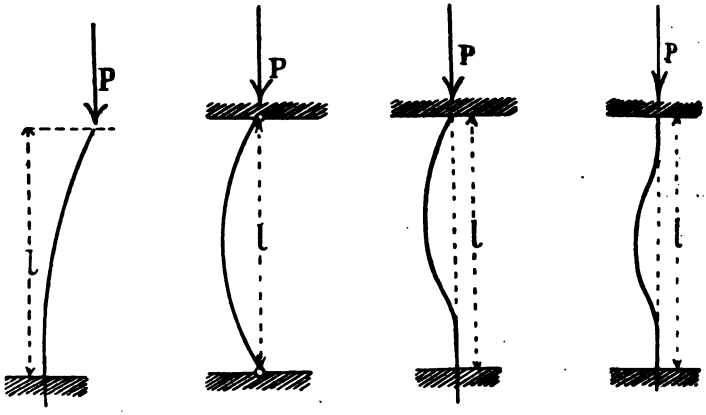
Es sind hier vier Fälle der Beanspruchung zu unterscheiden:

1. Das untere Ende des Stabes ist fest, das obere Ende frei (Fig. 43, siehe Seite 46).
2. Beide Enden sind frei beweglich in Gelenken so, daß die Gelenke sich nur in der ursprünglichen Achse des Stabes bewegen können (Fig. 44, siehe Seite 46).
3. Das untere Ende ist fest; das obere frei, kann sich jedoch nur in der ursprünglichen Stabachse bewegen (Fig. 45, siehe Seite 46).

4. Beide Enden sind fest eingeklemmt (Fig. 46).

Die zulässige Beanspruchung P ist in den vier Fällen verschieden, und zwar ist:

Fig. 43, Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.



für Fall 1: $P = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{n} \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}$

" " 2: $P = \frac{\pi^2}{n} \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}$

" " 3: $P = 2\frac{\pi^2}{n} \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}$

" " 4: $P = 4\frac{\pi^2}{n} \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}$

wo J = Trägheitsmoment (siehe Seite 76),
E = Elastizitätsmodul,
n = Sicherheitskoeffizient,
für Holz = 8
für Eisen = 6.

r'sche Formel.

Fig. 55.

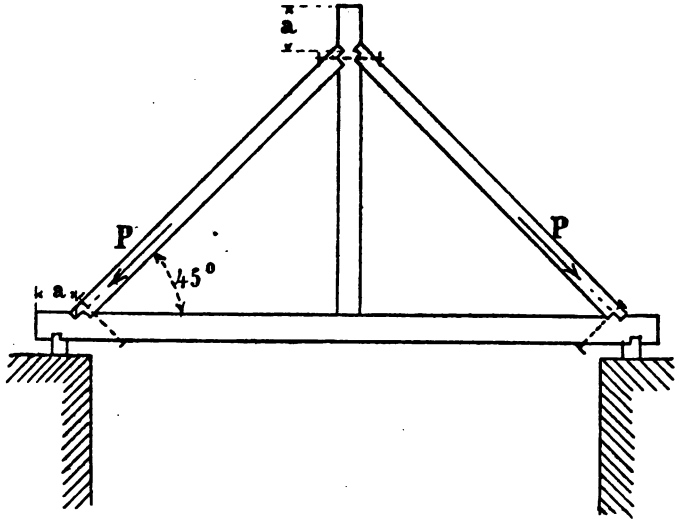
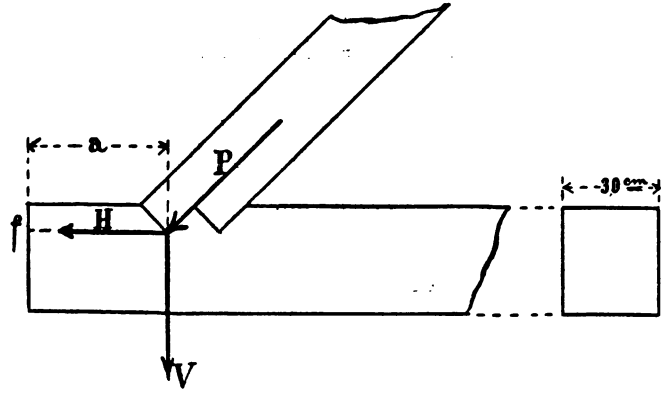


Fig. 56.

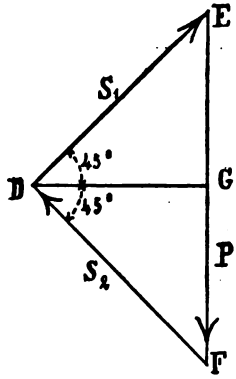


Die Länge der Streben ist

$$l = \sqrt{400^2 + 400^2} = 565 \text{ cm}.$$

Die Last P beansprucht die Streben AB und AC auf Druck, da die Fußpunkte B und C als unnachgiebig angenommen werden müssen, während der Punkt A durch die Last P nach unten bewegt wird.

Fig. 50.



Die Größe des Druckes S in den Streben berechnet man wie folgt:

Im Punkte A wirken drei Kräfte, und zwar die äußere Kraft P, und die in den Streben erzeugten inneren Gegenkräfte S_1 und S_2.

Diese drei Kräfte sollen im Gleichgewicht sein, müssen daher ein geschlossenes Kräftedreieck DEF (Fig. 50) bilden.

Ueber Konstruktion des Dreiecks siehe § 3, c Seite 10 und 16.

Das Dreieck ist ein gleichschenkliges; DG, senkrecht zu EF, halbirt mithin EF, so daß

$$EG = \frac{P}{2},$$

und

$$\measuredangle EDG = 45^0;$$

folglich ist:

$$\frac{^1/_2 P}{S_1} = \sin 45^0 = 0{,}7$$

$$S_1 = \frac{P}{2 \cdot 0{,}7}$$

$$= \frac{28\,250}{1{,}4} = 20\,178 \text{ kg}.$$

Ebenso groß ist natürlich auch S_2.

durch dieselbe Kraft P; folglich muß auch dieses Ende a = 55 cm lang sein.

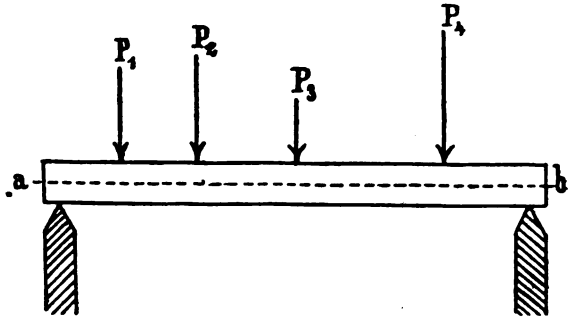
Ueber die horizontalen Schubspannungen, welche bei einem auf Biegung beanspruchten Körper auftreten, siehe § 10, G.

§ 10.

Biegungsfestigkeit.

Wenn auf einen stabförmigen Körper (Fig. 58) äußere Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 einwirken, welche senkrecht zur Stabachse ab gerichtet sind, so wird derselbe auf Biegungsfestigkeit beansprucht. Diese äußeren Kräfte werden, wie dies bereits im

Fig. 58.



§ 7 gezeigt, in dem Körper innere Gegenkräfte (Spannungen) hervorrufen, die in ihrer Wirkung derjenigen der äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten müssen.

Wir haben daher zunächst die Wirkungsweise der äußeren, und demnächst diejenige der inneren Kräfte zu untersuchen, um dann schließlich die Gleichgewichtsbedingung beider Wirkungen aufstellen zu können.

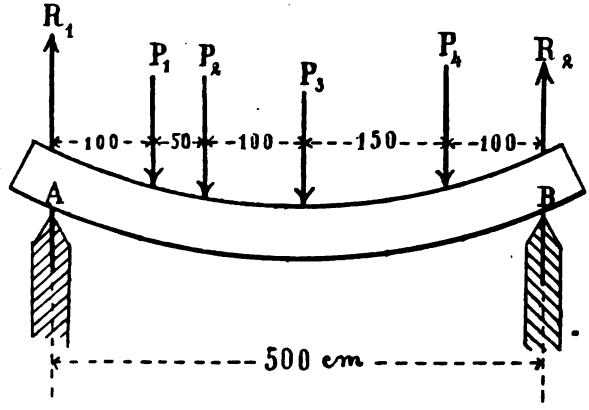
A. Wirkungsweise der äußeren Kräfte.

Ein Balken von 5,0 m freier Tragweite sei belastet mit

$$P_1 = 200\,kg,\ P_2 = 100\,kg,$$
$$P_3 = 300\,kg,\ P_4 = 100\,kg,$$

(Fig. 59). Die Kräfte P_1, P_2 ꝛc. rufen in den Endunterstützungen Auflagerreaktionen R_1 und R_2 hervor (siehe Seite 30) deren Größe man, wie folgt ermittelt:

Fig. 59.



Wir denken den Balken über dem rechten Auflager im Punkte B um ein Charnier beweglich (Fig. 60, siehe Seite 61), und statt des linken Auflagers die entsprechende Auflagerreaktion R_1 am Balken wirkend, so muß, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, das rechtsdrehende (+) Moment der Kraft R_1 gegen den Punkt B gleich sein der Summe der links drehenden (−) Momente gegen den Punkt B, d. h. es muß sein:

$$R_1 \cdot 500 = P_1 \cdot 400 + P_2 \cdot 350 + P_3 \cdot 250 + P_4 \cdot 100.$$

Die Werthe für P_1, P_2 . . eingesetzt, giebt:

$$R_1 = 400\,kg;$$

ferner muß sein:

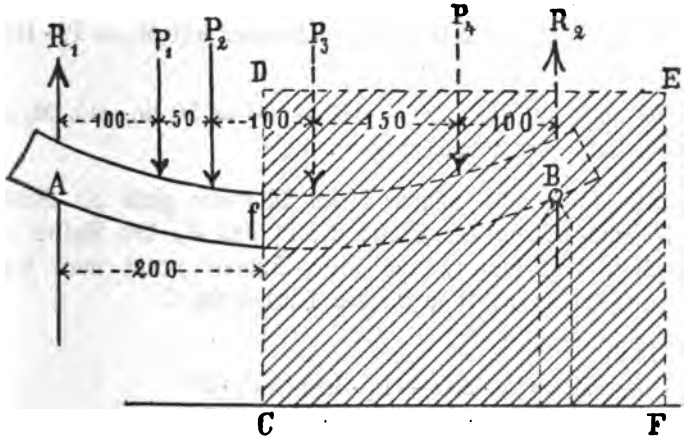
$$R_1 + R_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$R_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - R_1.$$

Die Werthe eingesetzt, giebt

$$R_2 = 300 \text{ kg}.$$

Nachdem uns nunmehr die den Balken angreifenden äußeren Kräfte (wozu auch die Auflagerreaktionen R_1 und R_2 zählen) bekannt sind, wollen wir untersuchen, wie dieselben gegen einen Querschnitt f, 200 cm von A entfernt, wirken.

Fig. 60.



Der Balken wird sich in Folge der Belastung durchbiegen; er nehme die in Fig. 60 dargestellte Form an.

Wir denken den rechten Theil fB des Balkens mit einem auf dem Boden stehenden Kasten CDEF umgeben und diesen Kasten mit Cementmörtel ausgefüllt, so daß das rechte Fragment fB des Balkens einschließlich der Lasten P_3 und P_4 vollständig fest eingemauert ist, so wird doch durch diese Manipulation an dem Gleichgewichtszustand und an der Form des Balkens nichts geändert.

An dem linken freien Fragment Af wirken dann die äußeren Kräfte R_1, P_1 und P_2 und zwar in folgender Weise:

Die Kraft R_1 hat das Bestreben, den Balken um den Querschnitt f nach oben zu drehen, d. h. ihn um den Querschnitt f zu biegen und würde dies auch thun, wenn ihr nicht die Kräfte P_1 und P_2 entgegenwirkten, welche ihrerseits die Tendenz haben, den Balken um den Querschnitt f nach unten zu drehen. Es wirken mithin gegen den Querschnitt f folgende statische Momente:

R_1 am Hebelarm 200 cm, also $M_1 = R_1 \cdot 200$, rechts herum drehend (+);

P_1 am Hebelarm $200 - 100 = 100$ cm, also $M_2 = P_1 \cdot 100$, links herum drehend (—);

P_2 am Hebelarm $200 - 100 - 50 = 50$ cm, also $M_3 = P_2 \cdot 50$, links herum drehend (—).

Die algebraische Summe dieser Momente giebt die Größe der Gesammttendenz der Kräfte R_1, P_1 und P_2, den Balken im Querschnitt f zu biegen, und diese Summe nennt man das Biegungsmoment M gegen den Querschnitt f.

Es ist mithin:

$$\begin{aligned} M_f &= R_1 \cdot 200 - P_1 \cdot 100 - P_2 \cdot 50 \\ &= 400 \cdot 200 - 200 \cdot 100 - 100 \cdot 50 \\ &= 55000 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man diese Betrachtung für das rechte Balkenfragment ausführt.

Denkt man sich nämlich das linke Fragment Af mit den Kräften P_1 und P_2 eingemauert und das rechte f B frei (Fig. 61, siehe Seite 63), so wirken an dem letzteren die äußeren Kräfte: R_2, P_3 und P_4, und deren gesammte Drehwirkung gegen den Querschnitt f ist wieder gleich der algebraischen Summe ihrer statischen Momente gegen f. Das Moment von R_2, weil links

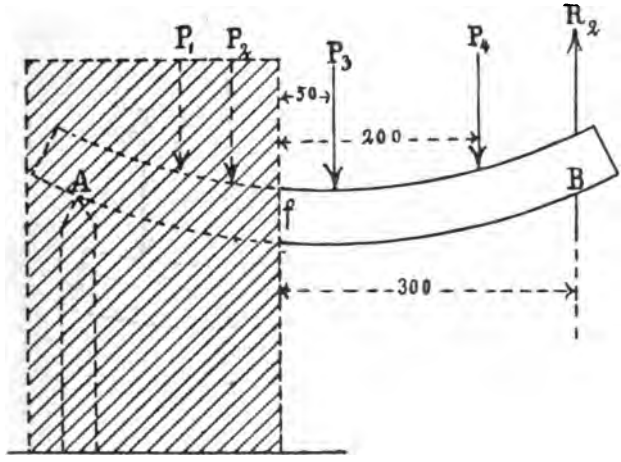
herum drehend, ist —, dasjenige von P_3 und P_4, weil rechts herum gegen f drehend, ist +; folglich ist

$$M_f' = -R_2 \cdot 300 + P_3 \cdot 50 + P_4 \cdot 200.$$

Die Werthe für R_2, P_3 und P_4 eingesetzt, giebt:

$$M_f' = -300 \cdot 300 + 300 \cdot 50 + 100 \cdot 200$$
$$= -55000 \text{ cmkg}.$$

Fig. 61.



Das negative Vorzeichen bedeutet, daß das M_f' die Tendenz hat, das rechte Balkenfragment um den Querschnitt f nach links herum zu biegen, wie dies ja auch die Figur 61 ergiebt. Die absoluten Werthe der Biegungsmomente sind in beiden Fällen gleich.

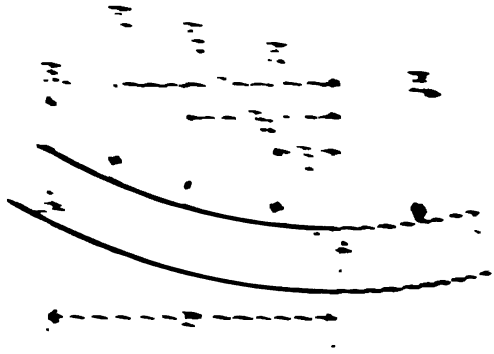
Es ist daher bei der Bestimmung des Biegungsmomentes gegen einen Querschnitt gleichgültig, ob man die Kräfte rechts oder links von dem Querschnitt nimmt; man pflegt jedoch stets das linke Fragment zu wählen.

[illegible]

[illegible] Quer-
[illegible] der
[illegible] Frag-
[illegible] Fig. 62

[illegible]

[illegible] der äußeren
[illegible]



[illegible] in Folge
[illegible]

3. Bestimmung der inneren Spannungen.

a. Spannungsmoment.

[illegible] durchgebogen, so
[illegible] an der konkaven Seite zu-
[illegible] an der konvexen Seite gedehnt,
[illegible] einfache Betrachtung ergiebt:

[illegible] Fig. 63, siehe Seite 65 habe vor der Belastung

die Lage abcd, die Endflächen ac und bd senkrecht zur Längsachse e f.

Bei der Durchbiegung des Stabes (Fig. 64) bleiben die Endflächen a'c' und b'd' senkrecht zur gebogenen Stabachse e'f'.

Diese Lage der Endflächen ist aber, wie die Fig. 64 er-

Fig. 63.

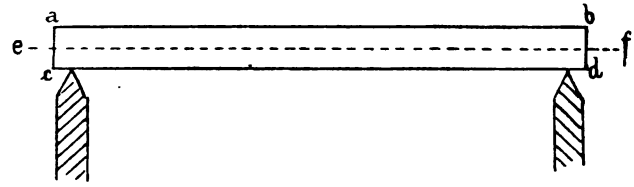
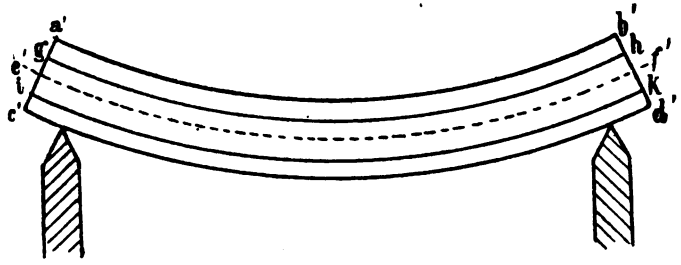


Fig. 64.



giebt, nur möglich, wenn die Faserschicht a'b' < ab und die Faserschicht c'd' > cd wird, d. h. wenn die Schicht ab zusammengedrückt und c d gedehnt wird.

(Praktisches Beispiel mit einem Rohrstock, der beim Durchbiegen an der inneren Seite in der Mitte Erhebungen, also Pressung der Faserschicht (Druck) zeigt, während die äußeren Fasern in der Mitte zerreißen, daher auf Zug beansprucht werden.)

Es treten mithin bei der Durchbiegung an der äußeren

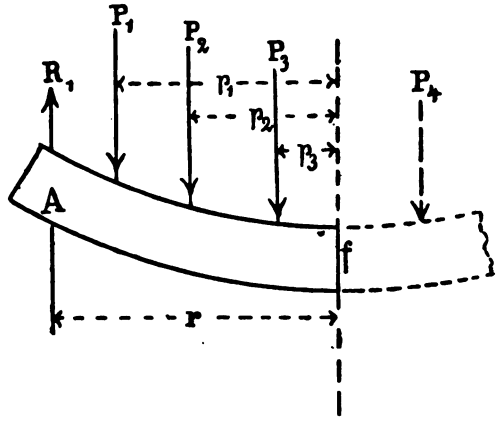
Man kann daher allgemein sagen:

Das Biegungsmoment M gegen einen Q
schnitt ist gleich der algebraischen Summ
Momente der äußeren Kräfte des einen S
ments gegen diesen Querschnitt; oder (Fig.

$$M_f = R_1 \cdot r - \Sigma P \cdot p.$$

Nachdem wir nunmehr die biegende Wirkung der ä
Kräfte als das Biegungsmoment M ermittelt, wollen wir

Fig. 62.



suchen, welche inneren Spannungen in dem Querschnitt f in der Durchbiegung auftreten.

B. Bestimmung der inneren Spannungen.

a. Spannungsmoment.

Wird ein stabförmiger Körper nach unten durchgebog werden die oberen Faserschichten (an der konkaven Seit sammengedrückt, und die unteren (an der konvexen Seite) g gezogen, wie folgende einfache Betrachtung ergiebt:

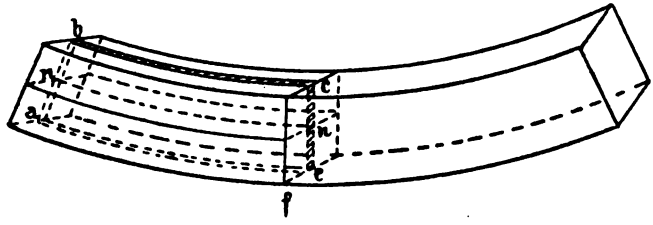
Ein Balken (Fig. 63, siehe Seite 65) habe vor der Bel

mithin jeden Querschnitt in zwei Theile, von denen in dem einen, für die zur Stabachse parallelen Fasern, nur Druckspannungen und in dem andern nur Zugspannungen bestehen. Für diese Faserspannungen gelten folgende Gesetze:

1. Die Zug- bezw. Druckspannungen sind proportional ihrer Entfernung von der neutralen Achse.
2. Für Fasern, welche zu beiden Seiten der neutralen Achse (also auf Zug- und Druckseite) gleich weit von dieser entfernt liegen, sind die absoluten Werthe ihrer Spannungen gleich.

Um nun die Größe dieser Spannungen zu ermitteln, nehmen wir wieder an, der durchgebogene Balken sei in f durchschnitten (Fig. 66). Soll dann das linke Fragment nach

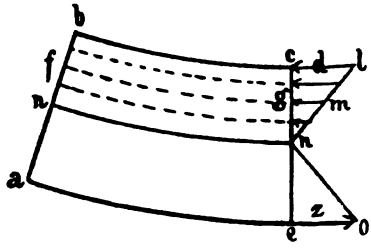
Fig. 66.



dem Schnitte in seiner gebogenen Form erhalten werden, so ist dies nur möglich, wenn wir in dem Querschnitt an den Enden der Fasern äußere Kräfte anbringen, welche im Stande sind, die einzelnen Fasern ebenso zusammenzudrücken bezw. zu dehnen, wie dies in Folge der Durchbiegung geschehen, d. h. Kräfte, welche so groß sind wie die betreffenden Faserspannungen, aber diesen entgegengesetzt gerichtet, normal zur Querschnittsfläche. (Diese Spannungen nennt man die Normalspannungen des Querschnittes f im Gegensatz zu den Transversalspannungen V_f desselben. Ueber letztere siehe § 10, B, b.)

Zur Bestimmung der Größe dieser Kräfte denken wir uns aus dem linken Fragment (Fig. 66) eine vertikale Längsfaserschicht abcc herausgeschnitten. Wir wollen diese Faserschicht durch Anbringung von äußeren Kräften in ihrer gebogenen Form erhalten (Fig. 67).

Fig. 67.



n n sei die Schnittlinie der neutralen Faserschicht; in dieser ist, wie wir gesehen, die Spanung = 0.

Die Faser b c kann in ihrer Länge nur erhalten werden durch eine Kraft, welche die Faser zusammendrückt, also ⟵ gerichtet ist; die Größe dieser Druckkraft d sei gleich der Strecke l c.

Für die in der Mitte zwischen bc und nn gelegene Faser fg muß dann, nach dem vorigen Gesetz 1, die erforderliche Druckkraft

$$\overline{mg} = \frac{1}{2}\, d = \frac{\overline{lc}}{2}$$

sein. Verbindet man l und m, so muß die Linie l m nach dem Punkte n schlagen, weil sich verhält:

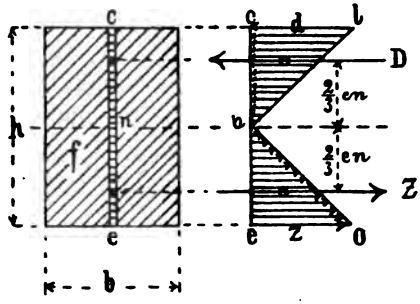
$$lc : mg = cn : gn.$$

Bestimmt man so für alle übrigen Fasern auf der Druckseite (also zwischen bc und nn), die für die Erhaltung ihrer Länge erforderlichen Druckkräfte, so müssen die Größen derselben sämmt-

lich in dem Dreieck ncl liegen, mit Rücksicht auf die im Gesetz 1 gegebene Proportionalität.

Da wir die Längsfasern der Schicht dicht übereinander gelagert denken, so müssen auch die entsprechenden äußeren Druckkräfte dicht übereinander liegen. Es werden die Kräfte, welche erforderlich sind, um alle auf der Druckseite gelegenen Längsfasern in ihrer durch die Durchbiegung angenommenen Länge zu erhalten, in ihrer Gesammtheit die Fläche des Dreiecks ncl ausmachen (Fig. 68), und die Gesammtsumme, d. h.

Fig. 68.



die Resultante D dieser Druckkräfte wird somit, der Größe nach, dargestellt durch den Flächeninhalt des Dreiecks ncl. Dieser ist

$$= \overline{cn}\,\frac{\overline{cl}}{2} = \frac{\overline{cn}\cdot d}{2};$$

folglich

$$D = \frac{\overline{cn}\cdot d}{2}.$$

Der Angriffspunkt dieser Resultante D liegt im Schwerpunkte des Dreiecks ncl, also $\frac{2}{3}\overline{cn}$ von n entfernt.

Die auf der Zugseite, also zwischen nn und ae gelegenen Fasern, können in ihrer durch die Durchbiegung gewonnenen

[illegible] die gleich [illegible] gesetzt ge- [illegible] erforderliche [illegible] des Gesetzes 1 auf Seite [illegible] die Gesammtsumme Z [illegible]

$$Z = \frac{\overline{en} \cdot d}{2}$$

[illegible] in dem [illegible]

[illegible] in der Mitte des Querschnittes [illegible] die äußersten Faserschichten ae und be [illegible] also

$$\overline{en} = \overline{en} = \frac{h}{2}.$$

und nach Gesetz 2 auf Seite [illegible] ist dann $d = z$, folglich auch

$$\frac{\overline{en} \cdot d}{2} = \frac{\overline{en} \cdot z}{2} = \frac{hd}{4}.$$

also auch

$$D = Z = \frac{hd}{4}.$$

Liegt aber die neutrale Achse nicht in der Mitte des Querschnittes, so werden die Dreiecke nel und neo verschieden groß, also auch D und Z ungleich.

In vorstehender Weise kann man für sämmtliche vertikale Längsfaserschichten, um diese in der durchgebogenen Form zu erhalten, die erforderlichen Druck- bezw. Zugkräfte (D, Z) er-

mitteln. Bei einem rechteckigen Querſchnitte (Fig. 69) ſind alle Vertikalſchichten von gleicher Höhe, folglich müſſen auch die Kräfte D bezw. Z für alle Schichten dieſelben ſein. Für Querſchnitte von anderer Form (ſiehe Figur 70) ſind die Höhen der

Fig. 69.

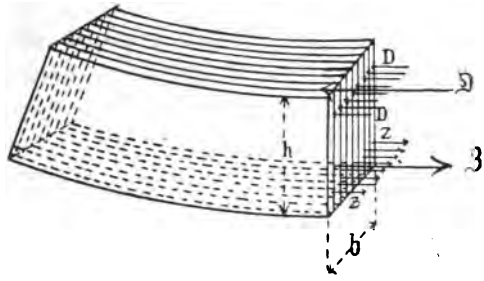
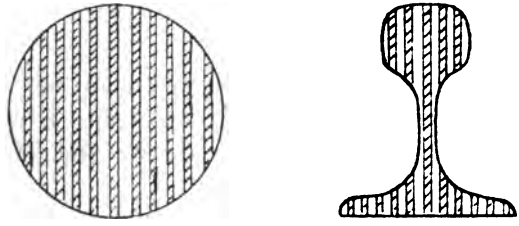


Fig. 70.



einzelnen vertikalen Faſerſchichten nicht gleich, daher auch die Werthe D bezw. Z für die Schichten verſchieden. Wenn wir nun die ſämmtlichen Druckkräfte D der einzelnen Vertikalſchichten eines Querſchnittes vereinigt denken zu der Einzelkraft

$$\mathfrak{D} = \Sigma D,$$

und ebenſo die ſämmtlichen Zugkräfte Z zu der Einzelkraft

$$\mathfrak{Z} = \Sigma Z,$$

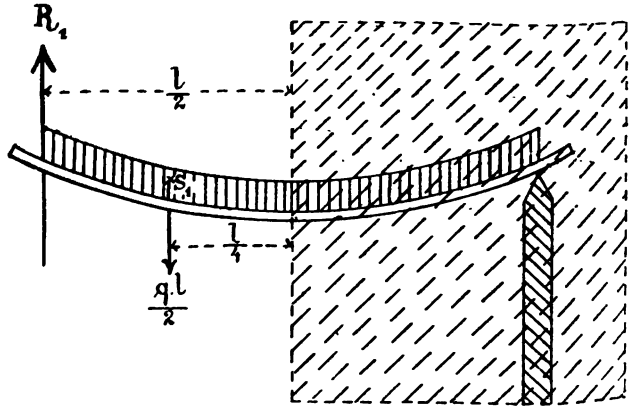
Der Schwerpunkt S der gleichmäßig vertheilten Laſt Q liegt in der Mitte.

Da Belaſtung und Unterſtützungen ſymmetriſch, ſo muß ſich die erſtere auf die Auflager gleichmäßig vertheilen, folglich:

$$R_1 = R_2 = \frac{q \cdot l}{2}.$$

Der gefährliche Querſchnitt liegt an der Stelle, wo die Durchbiegung am ſtärkſten, alſo hier in der Mitte. Um das Biegungsmoment gegen dieſen Querſchnitt zu beſtimmen, denken wir die rechte Balkenhälfte wieder feſt ummauert und ſtatt der linken Unterſtützung die entſprechende Auflagerreaktion R_1 (Fig. 88); dann wirken gegen den Querſchnitt in der Mitte als Außenkräfte:

Fig. 88.



1. R_1 nach oben;
2. die auf die Länge $\frac{l}{2}$ gleichmäßig vertheilte Laſt $= \frac{ql}{2}$, in dem Schwerpunkte S_1 konzentrirt gedacht, nach unten.

spannung bezw. der Gesammtzugspannung der Fasern in dem Querschnitte f; das Moment D · a giebt mithin auch die Größe des Kraftmomentes der Faserspannungen des Querschnittes f, und nennt man daher dieses Moment das Spannungsmoment des Querschnittes f.

Die Spannung der Fasern wird erzeugt durch die äußeren Kräfte, in Folge der Durchbiegung, und bildet daher die Gegenwirkung für die Wirkung jener Kräfte. Soll Gleichgewicht in dem Querschnitte f des durchgebogenen Balkens stattfinden, so muß Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sein, d. h. es muß das Moment der inneren Spannungen (Spannungsmoment) gleich demjenigen der äußeren Kräfte (Biegungsmoment) sein; also:

$$M_f = D \cdot a.$$

Wie wir gesehen, ist die Größe und Lage von D bezw. Z abhängig von der Größe und Form des Querschnittes; folglich ist auch die Größe des Spannungsmomentes bedingt durch die Abmessungen und die Form des Querschnittes.

Für einen rechteckigen Querschnitt berechnet sich das Spannungsmoment, wie folgt:

Wir hatten bereits gefunden, daß für die einzelne Faserschicht eines solchen Querschnittes:

$$D = Z = \frac{h \cdot d}{4} \text{ bezw. } = \frac{h \cdot z}{4},$$

wenn h = Höhe des Balkens und d bezw. z die Druck- bezw. Zugspannung der äußersten Faserschichten bedeutet.

Diese Druck- bezw. Zugspannung darf natürlich nicht größer sein als die zulässige Beanspruchung k der Zug- und Druckfestigkeit, und zwar wählt man für die Bestimmung des Spannungsmomentes stets das kleinere k, wenn Zug- und Druckfestigkeitskoeffizienten eines Materials (z. B. Gußeisen) nicht gleich sind.

[illegible] im [illegible] wir für [illegible] qcm an-[illegible]

[illegible] durch-[illegible] Fasern k [illegible] wird dann

$$[illegible]$$

[illegible] haben, [illegible] Faserschichten [illegible]

[illegible] qcm bezieht, [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] Längeneinheit [illegible] Fig. 69) [illegible]

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{4}$$

und ebenso

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{4}.$$

Wie Figur [illegible] zeigt, liegt der Angriffspunkt von D bezw. Z um $\frac{2}{3}\overline{cn}$ bezw. $\frac{2}{3}\overline{en}$ von der neutralen Achse entfernt. Da bei einem rechteckigen Querschnitte sämmtliche Kräfte D bezw. Z in derselben Höhe liegen, so muß der Angriffspunkt von D und Z ebenfalls um $\frac{2}{3}\overline{cn}$ bezw. $\frac{2}{3}\overline{en}$ von der neutralen Achse entfernt

liegen. Nun ist $\overline{cn} = \overline{en} = \frac{h}{2}$; folglich beträgt die Entfernung a zwischen D und Z:

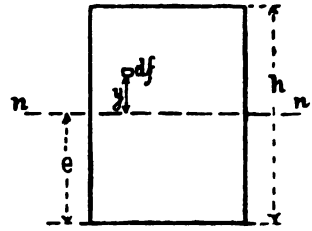
$$a = \frac{2}{3}\frac{h}{2} + \frac{2}{3}\frac{h}{2} = \frac{2}{3}h,$$

und es wird für einen rechteckigen Querschnitt die Größe des Spannungsmomentes:

$$D \cdot a = \frac{b \cdot h \cdot k}{4} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} k.$$

In ähnlicher Weise könnte man auch für sonstige Querschnittsformen das Spannungsmoment bestimmen, indeß würde diese Art der Entwickelung für andere, als rechteckige Querschnitte, die Rechnung äußerst komplizirt machen. Man hat vielmehr mit Hülfe der höheren Mathematik eine allgemein gültige Formel für das Spannungsmoment eines beliebigen Querschnittes aufgestellt, und diese lautet:

Fig. 72.



$$D \cdot a = \frac{J}{e} k,$$

wo e den Abstand der am stärksten beanspruchten Faser von der neutralen Achse (also bei Querschnitten, die symmetrisch gegen die neutrale Achse sind, $e = \frac{h}{2}$) und k die zulässige Zug- bezw. Druckspannung bedeutet.

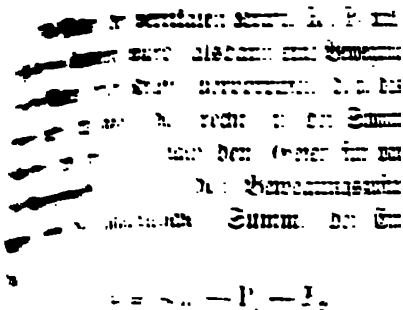
J ist gleich der Summe aller Flächenelemente df eines Querschnittes (Fig. 72), ein jedes multiplizirt mit dem Quadrat seiner Entfernung y von der Biegungsachse nn, und wird dargestellt durch folgendes Integral:

$$J = \int df \cdot y^2$$

Balken, vo
Breite =

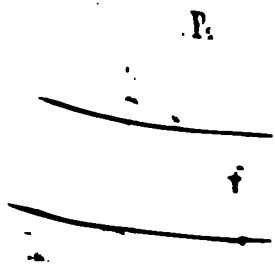
Mehr
zuſammen
maſſiver

Ferner iſt n
Es iſt
über- ob
moment
der Wi



Das Wide
d. h. der Querſc
ſich verhält:

oder



Dies ſind di
ſtandsmoment.
Wir hatten
Werth für D · a in

ein, ſo wird:

Dieſe Gleichung,

Größe desſelben, wie die allgemeine Gleichung zeigt, abhängig iſt von dem durch die Querſchnittsform bedingten Faktor $\frac{J}{e}$, ſo hat man dieſen Faktor $\frac{J}{e}$ das Widerſtandsmoment W des Querſchnittes genannt; und man kann allgemein ſetzen

$$D \cdot a = W \cdot k.$$

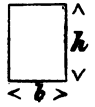
Die Bezeichnung „Widerſtandsmoment" iſt nicht ſehr korrekt und kann leicht zu falſchen Auffaſſungen Veranlaſſung geben, denn ein Moment iſt ſtets gleich Kraft mal Hebelsarm, und von dieſem liegt in dem Ausdruck für W nichts; zweckmäßiger iſt der in einigen Lehrbüchern für W gebrauchte Ausdruck: „Querſchnittsmodul".

Es iſt daher Folgendes wohl zu beachten:

Das Widerſtandsmoment bedeutet einen von den Querſchnittsdimenſionen des Trägers abhängigen, variablen Faktor des Spannungsmomentes.

Die Werthe der Widerſtandsmomente für die verſchiedenen Querſchnittsformen ſind in M. T. Tabelle VI zuſammengeſtellt.

Beſonders zu merken ſind folgende Werthe:

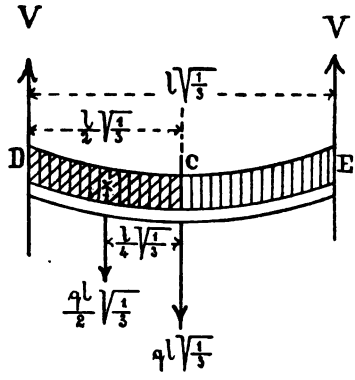
für  $W = \frac{bh^2}{6}$

" $W = \frac{b^3}{6}$

" $W = \frac{\pi d^3}{32}$ od. rd. $\frac{d^3}{10}$

ſpannung V. Denken wir den Balken in D und E durchſchnitten, ſo müßte man, um das Balkenſtück DE in ſeiner durchgebogenen Form zu erhalten, in D und E nach oben wirkende Vertikalkräfte = V anbringen (Fig. 92).

Fig. 92.



Die Länge DE iſt

$$= l - 2\frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = l\left(1 - 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = l\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Es war

$$V = \frac{ql}{2}\sqrt{\frac{1}{3}};$$

folglich:

$$M_c = \frac{ql}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{ql}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{l}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{ql^2}{24} = \frac{1}{2} M_a$$

Nehmen wir wieder den Querschnitt a der Fig. 73 an und theilen diesen in zwei gleiche Theile (Fig. 74), so wird für jeden Theil-Querschnitt

$$W_{,} = \frac{15 \cdot 20^2}{6} = 1000,$$

mithin für beide Querschnitte zusammen

$$2 \cdot W_{,} = 2000,$$

Fig. 74.

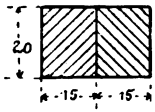
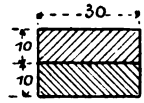


Fig. 75.



d. h. ebenso groß, wie das W_a des vollen Querschnittes. Dasselbe Resultat erhält man bei jeder beliebigen Theilung der Breite.

Theilt man denselben Querschnitt aber in der Höhe (siehe Fig. 75), so wird für jeden Theil-Querschnitt:

$$W_{,,} = \frac{30 \cdot 10^2}{6} = 500$$

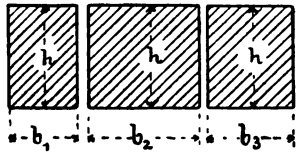
und für beide Theil-Querschnitte zusammen:

$$2\,W_{,,} = 2 \cdot 500 = 1000,$$

während das W_a des vollen Querschnittes = 2000 ist.

Hieraus folgt (Fig. 76):

Fig. 76.



Mehrere Balken, nebeneinander gelegt, haben zusammen dasselbe Tragvermögen, wie ein massiver

[illegible] der Einzelbalken und einer [illegible]

[illegible] gelegt, besitzen [illegible] Tragvermögen, wie ein [illegible] Abmessungen.

[illegible]

[illegible] Tragbalken lose [illegible] Gesammtwiderstands- [illegible] gleich der Summe [illegible] Balken.

[illegible] ist am größten, [illegible] ausgenutzt, wenn [illegible]

[illegible]

oder

[illegible]

[illegible] Sätze über das Widerstandsmoment.

[illegible] $D \cdot a = W \cdot k$. Setzen wir diesen Werth für $D \cdot a$ in die Gleichung:

$$M_f = D \cdot a$$

ein, so wird:

$$M_f = W \cdot k.$$

Diese Gleichung, welche allgemein für jeden Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Trägers gilt, ist die wesentlichste Formel der Biegungsfestigkeit; mit ihrer Hülfe bestimmt man die Größe des erforderlichen Balkenquerschnittes f in dem gewählten Beispiel (Fig. 59), wie folgt:

Es ist das Biegungsmoment, wie wir Seite 62 gesehen haben, gegen f:

$$M_f = 55000 \text{ cmkg}.$$

Also muß für diesen Querschnitt, soll der Zustand des Gleichgewichtes (d. h. der Ruhe) stattfinden, die Gleichung bestehen:

$$55000 = W \cdot k;$$

für Holz ist $k = 70$ kg pro qcm, und für den □ Querschnitt ist:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

also

$$55000 = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot 70.$$

Hierin sind b und h unbekannt; nehmen wir $b = 15$ cm an, so wird:

$$55000 = \frac{15 \cdot h^2}{6} \cdot 70,$$

$$h^2 = 314 \text{ und } h \sim 18 \text{ cm}.$$

Folglich sind für den Querschnitt f des gegebenen Balkens bei der angenommenen Belastung die Abmessungen $b = 15$ cm und $h = 18$ cm erforderlich.

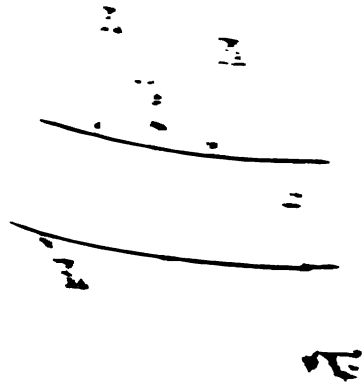
Da die Größe des Biegungsmomentes,

$$M = R_1 \cdot r - \Sigma P \cdot p,$$

von der Lage des Querschnittes abhängig ist, so wird für die verschiedenen Querschnitte des Balkens das M verschiedene Werthe haben müssen, mithin werden sich für jene auch verschiedene Dimensionen ergeben. Welche dieser Dimensionen nun für die Bestimmung des erforderlichen Balkenquerschnittes maßgebend sind, wird aus dem folgenden Abschnitt C erhellen.

b. Transversalspannungen.

Nehmen wir an, der in Fig. 60 dargestellte, bis f eingemauerte Balken (von dessen Eigengewicht wir vorläufig absehen wollen, den wir also als gewichtslos betrachten) sei im Querschnitte f durchschnitten.



innere Vertikalkraft V_f' das Gleichgewicht halten, deren Größe $= — V_f$ ist.

Diese innere Spannung V_f' des Querschnittes f nennt man die Transversalspannung desselben, und die Kraft V_f, d. h. die algebraische Summe der Außenkräfte des linken Fragments nennt man die Transversalkraft für den Querschnitt f.

In dem gewählten Beispiel ist die Transversalkraft des linken Fragments:

$$\begin{aligned} V_f &= + R_1 — P_1 — P_2 \\ &= + 400 — 200 — 100 \\ &= + 100 \text{ kg}, \end{aligned}$$

folglich die Transversalspannung:

$$V_f' = — 100 \text{ kg}.$$

Für das rechte Fragment wird:

$$\begin{aligned} V_{f_1} &= + R_2 — P_3 — P_4 \\ &= + 300 — 300 — 100 \\ &= — 100 \text{ kg}, \end{aligned}$$

und demnach:

$$V_{f_1}' = + 100 \text{ kg}.$$

Ein Vergleich der letzteren Werthe mit den obigen zeigt, daß die entsprechenden Werthe beider Fragmente gleiche absolute Größen, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dies gilt allgemein für jeden beliebigen Querschnitt und ergiebt folgenden Satz:

> Die Transversalkräfte der beiden Fragmente eines durchgebogenen Balkens sind, wo auch der Querschnitt liegen mag, stets einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Folglich bestehen auch in jedem Querschnitte zwei gleiche, aber entgegengesetzte Transversalspannungen (Figur 78, siehe Seite 84). Wenn aber zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte

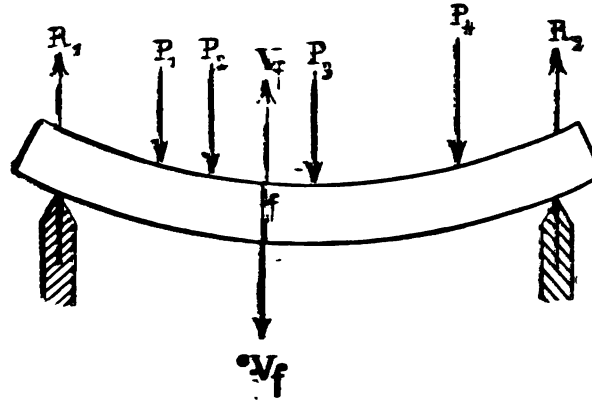
in einem Querschnitte wirken, so beanspruchen sie diesen auf Abscheerung.

Wir können daher mit anderen Worten sagen:

> Die Transversalkraft erzeugt in dem Querschnitte f eine **vertikale** Schubspannung.

Außer dieser vertikalen Schubspannung treten, in Folge der verschiedenen Längenänderung der einzelnen Faserschichten bei der

Fig. 75.



Durchbiegung, auch noch horizontale Schubkräfte auf, deren Behandlung aus sachlichen Gründen erst später (§ 10, G) erfolgen wird.

Von den Schubspannungen können wir bei Bestimmung des erforderlichen Balkenquerschnittes absehen, da deren Wirkung im Vergleich zu der Größe des Spannungsmomentes nur unbedeutend ist. Wann jene Spannungen in Rechnung zu setzen sind, werden die weiteren Betrachtungen ergeben.

C. Bestimmung des Maximal-Biegungsmomentes.

Wie aus der Formel:

$$M = R_1 r - \Sigma P p$$

hervorgeht, hat für dieselbe Belastung das Biegungsmoment je nach Lage des Querschnittes verschieden große Werthe; und es ist klar, daß derjenige Querschnitt, gegen welchen das **größere** Biegungsmoment wirkt, auch eine **größere** Beanspruchung auf Zerbrechen erfährt. Es wird daher bei jedem Tragbalken **einen** Querschnitt geben, für welchen bei einer bestimmten Belastung das Biegungsmoment am **größten** ist.

Dieses Moment nennt man das **Maximal-Biegungsmoment** (M_{max}) des Trägers und den betreffenden Querschnitt den **gefährlichen Querschnitt**.

Will man dem Tragbalken, wie im Holzbrückenbau stets geschieht, einen konstanten Querschnitt geben, so ist für die Bestimmung des letzteren stets das M_{max} maßgebend, und dieses für die verschiedenen Biegungsbeanspruchungen zu ermitteln, soll unsere nächste Aufgabe sein.

Die Biegungsbelastung eines Trägers kann folgender Art sein:

a) **ruhende** Last:
   Einzellasten,
   gleichmäßig vertheilte Last,

b) **bewegliche oder fortschreitende** Last.

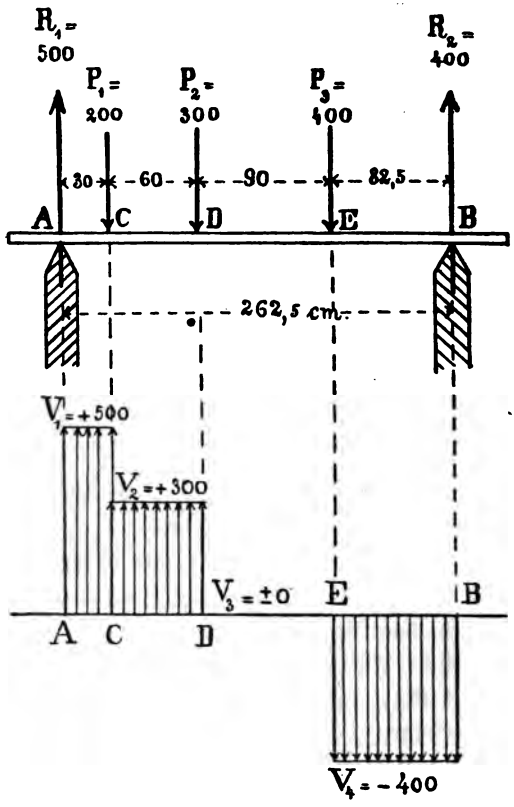
a. Ruhende Belastung.

α. M_{max} für eine Einzellast.

1. Der Stab ist an einem Ende fest eingespannt (Freiträger), an dem anderen Ende durch P belastet (Fig. 79, siehe Seite 86).

das M_{max}, indem man, vom linken Auflager beginnend, die Ein
laſten ſummirt ſo lange, bis die Summe $> R_1$ wird; unter
Laſt, bei welcher dies eintritt, liegt dann der gefährliche Q
ſchnitt. Es iſt hierbei die Möglichkeit nicht ausgeſchloſſen,
die Transverſalkraft, bevor ſie aus dem + = in den —=We
übergeht, unter einem Querſchnitte = 0 wird, wie in dem
Figur 97 gegebenen Beiſpiel. Die Transverſalkraft wird

Fig. 97.



P wird sich auf beide Unterstützungen gleichmäßig vertheilen, also

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt in der Mitte, in dem Angriffspunkte der Last P, aus folgenden Gründen: Gegen die Querschnitte zwischen A und C wirkt, wenn wir die linke Hälfte des Stabes betrachten, als äußere Kraft nur R_1; folglich ist das Biegungsmoment gegen diese Querschnitte gleich dem Produkte aus der Kraft R_1 und ihrem Abstande von dem betreffenden Querschnitte. Dieser Abstand nimmt von A nach C hin zu, folglich nimmt auch das Produkt $R_1 \times$ Abstand, d. h. die Größe M, von A bis C zu.

Betrachten wir die rechte Balkenhälfte, so wirkt gegen die Querschnitte desselben als Außenkraft nur die Auflagerreaktion R_2; folglich nehmen auch hier die Biegungsmomente für die einzelnen Querschnitte von B nach C zu. Da auf beiden Balkenhälften die Momente nach C hin zunehmen, so muß hier das Biegungsmoment ein Maximum sein, d. h. in C liegt der gefährliche Querschnitt. Gegen diesen Querschnitt C ist das Biegungsmoment:

$$M_c = R_1 \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

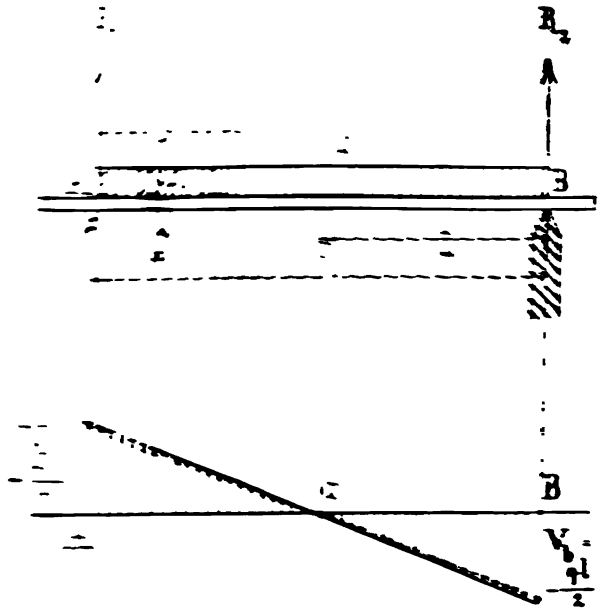
$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4}$$

(siehe M. T. Tabelle III, 2).

3. An einem frei aufliegenden Träger wirkt die Last P nicht in der Mitte, sondern in der Entfernung a vom linken Auflager (Fig. 81, siehe Seite 88).

Zur Bestimmung der Auflagerreaktionen R_1 und R_2 denken wir den Balken über der rechten Unterstützung um ein Charnier beweglich und statt der linken Unterstützung die entsprechende

[illegible]



[illegible] V_1, V_2 und V_3 als Ordinaten in den [illegible] Querschnitten [illegible] erhalten wir für den Verlauf der [illegible] das in Figur [illegible] gegebene Bild. [illegible] wir [illegible] gesehen haben, liegt der gefährliche Quer-[illegible] dort, wo $V = 0$ ist.

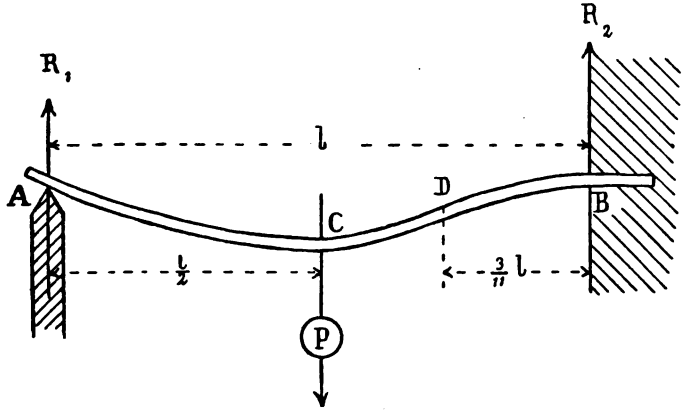
Der gefährliche Querschnitt liegt auch hier in dem Angriffspunkte C, aus denselben Gründen, wie im vorigen Falle 2 entwickelt. Daß in C der gefährliche Querschnitt liegen muß, geht aber auch aus folgender Betrachtung hervor: Wie wir wissen, ist der gefährliche Querschnitt derjenige, in welchem bei genügend großer Belastung der Bruch eintreten würde; zunächst aber wird stets die Stelle brechen, welche die größte Durchbiegung erfährt, und das ist in diesem Falle da, wo die Last P hängt; also liegt auch dort der gefährliche Querschnitt. Das Moment gegen diesen Querschnitt C ist:

$$M_{max} = R_1 \cdot a = \frac{P\,(l-a)\,a}{l}$$

(siehe M. T. Tabelle III, 3).

4. Ein Balken an einem Ende fest eingespannt, am anderen frei aufliegend (halbeingespannter Träger), trage in der Mitte C die Last P (Fig. 82).

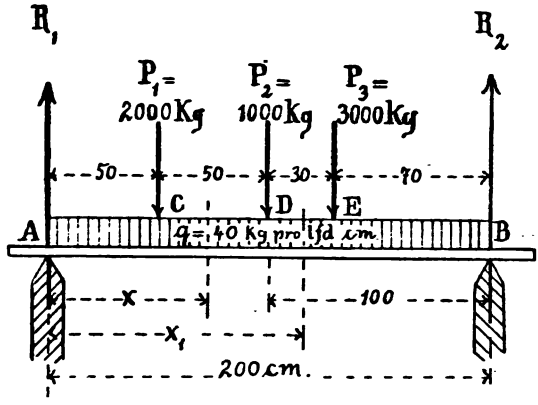
Fig. 82.



Die Bestimmung der Auflagerreaktionen R_1 und R_2 läßt sich hier nicht nach dem Hebelgesetz durchführen, da man den

und D in der Entfernung x vom linken Auflager A, so müßte, wenn für diesen Querschnitt V = 0, d. h. die algebraische Summe

Fig. 99.



der an dem Balken links von diesem Querschnitt wirkenden Außenkräfte = 0 sein soll, die Gleichung bestehen:

$$R_1 = P_1 + q \cdot x$$

oder

$$7050 = 2000 + 40 \cdot x,$$

folglich

$$x = \frac{5050}{40} = 126{,}25 \text{ cm},$$

d. h. der gefährliche Querschnitt läge 126,25 cm vom linken Auflager entfernt, also zwischen D und E und nicht, wie wir angenommen, zwischen C und D. Für die Transversalkraft V eines Querschnittes zwischen D und E kommt aber noch die Kraft P_2 in Betracht, mithin ist die obige Gleichung, aus der wir x entwickelt haben, nicht die maßgebende.

Dieselbe muß für einen Querschnitt x_1 zwischen D und E vielmehr lauten:

so muß entsprechend

$$R_1 < \frac{P}{2} \text{ sein.}$$

Die genaue Bestimmung von R_1 und R_2 ergiebt folgende Untersuchung:

Wie die Durchbiegungskurve AB, in Fig. 82 zeigt, geht bei dem Punkte D die Konvexität der Kurve in die Konkavität über; diese Formveränderung machen alle Faserschichten mit. Wir haben auf Seite 66 gesehen, daß die konvexen Faserschichten Zugspannungen und die konkaven Schichten Druckspannungen erleiden.

Wenn aber eine konvex gebogene Faserschicht in die konkave Form übergeht, so muß hierbei auch die Zugspannung in die Druckspannung übergehen und ebenso umgekehrt. Ein solcher Uebergang ist nur möglich, wenn an der Uebergangsstelle die Faserspannung = 0 ist. Da dieses für sämmtliche horizontalen Faserschichten des Balkens gilt, so müßen an der Uebergangsstelle, d. h. in dem Querschnitte D auch sämmtliche Faserspannungen = 0 sein, also auch das Spannungsmoment in diesem Querschnitte = 0; und da das Biegungsmoment M gleich dem Spannungsmoment, so muß auch gegen den Querschnitt D das Biegungsmoment = 0 sein. Als innere Spannung besteht dort nur die Transversalspannung V_d. Den Punkt D auf der Durchbiegungskurve nennt man den Wendepunkt der Kurve. Dieser liegt bei einem halb eingespannten Träger $\frac{3}{11}$ l von B entfernt.

Denken wir uns den rechts von D gelegenen Theil des Balkens eingemauert, so wirken an dem freien linken Theile die Außenkräfte R_1 und P mit den Armen $(l - \frac{3}{11} l)$ und $\left(\frac{l}{2} - \frac{3}{11} l\right)$. Die Gesammtwirkung dieser beiden Kräfte, d. h. das Biegungsmoment gegen den Querschnitt D, soll = 0 sein; also

$$M = R_1 \left(l - \frac{3}{11} l\right) - P \left(\frac{l}{2} - \frac{3}{11} l\right) = 0$$

oder

$$R_1 \cdot \frac{8}{11} l = P \cdot \frac{5}{22} l$$

$$R_1 = \frac{5}{16} P$$

folglich:

$$R_2 = \frac{11}{16} P.$$

Die Figur 82 zeigt uns, daß für die Lage des gefährlichen Querschnittes nur die Punkte B und C in Betracht kommen, und wir wollen untersuchen, gegen welchen dieser Querschnitte das M am größten ist. Wenn wir, zur Bestimmung von M_c, den rechts von C gelegenen Balkentheil eingemauert denken, so wirkt an dem linken freien Theil nur die Außenkraft R_1 am Arm $\frac{l}{2}$, folglich

$$M_c = R_1 \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{16} P \cdot \frac{l}{2}$$

$$= \frac{5}{32} P \cdot l.$$

Gegen B wirken die Außenkräfte R_1 (rechts drehend) und P (links drehend), mithin ist

$$M_b = R_1 l - \frac{P \cdot l}{2}$$

$$= \frac{5}{16} P \cdot l - \frac{8}{16} P l$$

$$= -\frac{3}{16} P \cdot l.$$

Das Vorzeichen (—) bedeutet den Drehungssinn des Momentes (nämlich links herum); der für uns maßgebende absolute Werth ist

$$M_b = \frac{3}{16} P \cdot l.$$

Ein Vergleich zwischen den Werthen von M_b und M_c ergiebt, daß

$$M_b > M_c,$$

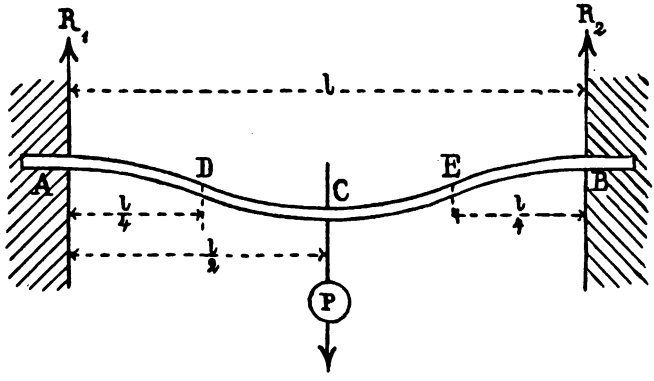
folglich liegt in B der gefährliche Querschnitt, und gegen diesen ist

$$M_{max} = \frac{3}{16} P \cdot l$$

(siehe M. T. Tabelle III, 5).

5. Ein Balken ist an beiden Enden fest eingespannt (ein gespannter Träger), in der Mitte durch P belastet (Fig. 84).

Fig. 84.



Da die Unterstützungen A und B gleichartig sind, so muß sich P auf beide Auflager gleichmäßig vertheilen; es ist daher

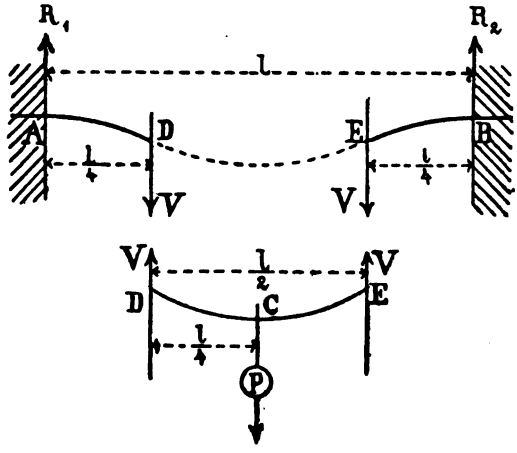
$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}.$$

Die am meiſten gefährdeten Querſchnitte ſind, wie aus der Figur erſichtlich, diejenigen bei A, B und C. Die Momente gegen A und B, M_a und M_b, werden einander gleich ſein; wir wollen daher nur M_a und M_c unterſuchen.

Zu dieſem Zwecke gehen wir wieder von den Wendepunkten D und E der Durchbiegungskurve aus; dieſelben liegen in dieſem Falle $\frac{l}{4}$ von den Auflagern entfernt.

In den Querſchnitten der Wendepunkte D und E iſt, wie wir wiſſen, das Spannungsmoment = 0; es beſteht dort nur die Transverſalſpannung V. Wenn man daher den Balken in D und E durchſchneidet, ſo muß das mittlere Stück DE (ſiehe Fig. 85) in ſeiner Lage und ſeiner durchgebogenen Form er-

Fig. 85.



halten bleiben, wenn Vertikalkräfte V an den Enden, in D und E, nach oben wirken. Ebenſo werden auch die Theile AD und

BE des Balkens in ihrer Lage und Form erhalten, wenn an den Enden D und E Vertikalkräfte V nach unten wirken.

Das mittlere Stück DE ist im Gleichgewicht, wenn $V = \frac{P}{2}$ ist, da P in der Mitte wirkt. Die Länge dieses Stückes ist $= \frac{l}{2}$, folglich ist nach dem Belastungsfalle 2 (Seite 86) das Biegungsmoment gegen C:

$$M_c = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \cdot l}{8}.$$

Das Endstück AD wird im Gleichgewicht gehalten, wenn

$$V = R_1 = \frac{P}{2}$$

ist. Nach dem Belastungsfall 1 (Seite 86) ist dann gegen den Querschnitt A:

$$M_a = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \cdot l}{8}.$$

Es ist also $M_a = M_b = M_c$; d. h. der gefährliche Querschnitt liegt bei A, B und C; mit anderen Worten: bei genügend großer Belastung ist ein Bruch des Balkens entweder in A oder B oder in C zu erwarten.

Folglich

$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{8}$$

(vergl. M. T. Tabelle III, 6).

Vergleichen wir die Maximalbiegungsmomente der Belastungsfälle 2, 4 und 5 (Fig. 80. 82. 84), so ergiebt sich beim Angriff einer Einzellast P in der Mitte für einen frei aufliegenden Träger:

$$M_2 = \frac{4}{16} P \cdot l,$$

für den halb eingespannten Träger:

$$M_4 = \frac{3}{16} P \cdot l$$

und für den eingespannten Träger:

$$M_5 = \frac{2}{16} P \cdot l.$$

Hieraus folgt, daß bei einer Einzellast in der Mitte das Tragvermögen des Balkens durch einseitiges Einspannen um $\frac{1}{3}$ (also auf $\frac{4}{3}$), durch beiderseitiges Einspannen auf das Doppelte des Tragvermögens eines frei aufliegenden Balkens erhöht wird.

β) M_{max} für gleichmäßig vertheilte Last.

Die gleichmäßig vertheilte Last betrage q Gewichtseinheiten pro 1 Längeneinheit (z. B. q kg pro lfd. cm).

Ist die Länge eines Balkens = l Längeneinheiten, so ist die Gesammtbelastung Q des Balkens:

$$Q = l \cdot q \text{ (Gewichtseinheiten).}$$

Für die Berechnung denken wir die gleichmäßig vertheilte Last Q stets als Einzellast in dem Schwerpunkte wirkend, und wir erhalten dann Folgendes:

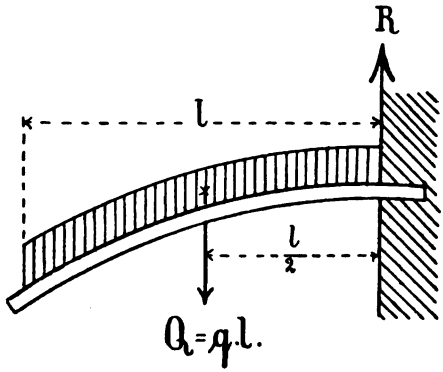
1. Der Balken ist an einem Ende eingespannt, am anderen Ende frei (Freiträger Fig. 86, siehe Seite 97).

Der Schwerpunkt S der gleichmäßig vertheilten Last liegt $\frac{l}{2}$ vom Auflager entfernt.

Wenn Q als Einzelkraft gedacht wird, so wirken an dem Träger als Außenkräfte nur R und Q; diese müssen sich das Gleichgewicht halten, also muß sein:

$$R = Q = q \cdot l.$$

Fig. 86.



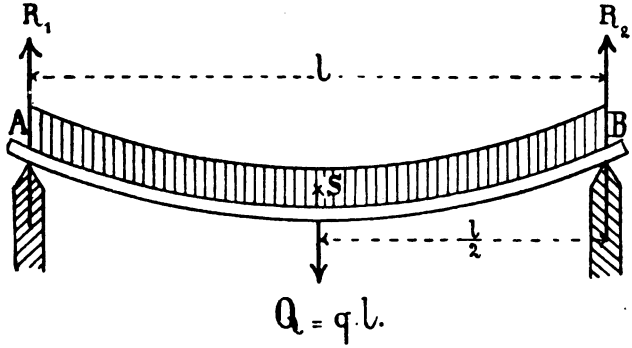
Der gefährliche Querschnitt liegt an der Befestigungsstelle und gegen diesen ist:

$$M_{max} = q\,l\,\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{2}$$

(siehe M. T. Tabelle III, 7).

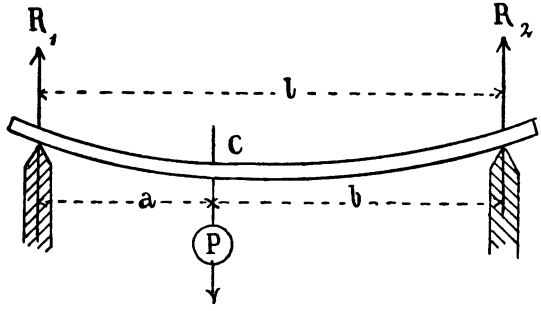
2. Der Balken liegt an beiden Enden frei auf (frei aufliegender Träger, Fig. 87).

Fig. 87.



Auflagerreaktion R_1 als äußere Kraft wirkend, so findet Gleichgewicht statt, wenn gegen das rechte Auflager die Momentengleichung erfüllt wird:

Fig. 81.



$$+R_1 \cdot l + (-P \cdot b) = 0,$$

$$R_1 \cdot l = P \cdot b$$

$$\mathbf{R_1 = \frac{P \cdot b}{l} = \frac{P\,(l-a)}{l}}$$

Da nun $R_1 + R_2 = P$ sein muß, so ist

$$R_2 = P - R_1$$

$$= P - \frac{P \cdot b}{l} = \frac{Pl - Pb}{l}$$

$$\mathbf{R_2 = \frac{P\,(l-b)}{l} = \frac{P \cdot a}{l}}$$

Also verhält sich

$$\mathbf{R_1 : R_2 = \frac{P \cdot b}{l} : \frac{P \cdot a}{l} = b : a}$$

d. h. bei einem durch eine Einzellast P beanspruchten, frei aufliegenden Träger, verhalten sich die Auflagerreaktionen umgekehrt wie ihre Entfernungen von P.

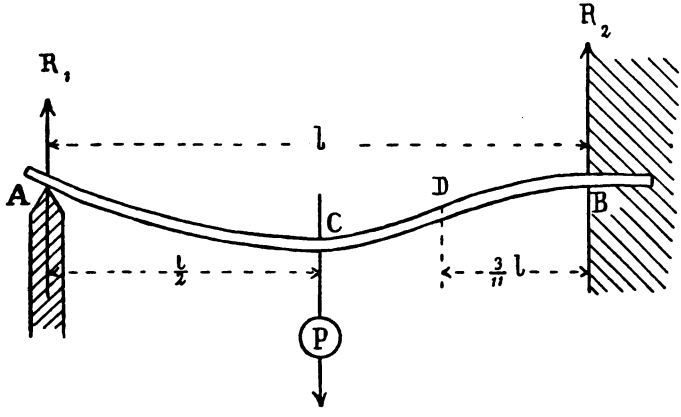
Der gefährliche Querschnitt liegt auch hier in dem Angriffspunkte C, aus denselben Gründen, wie im vorigen Falle 2 entwickelt. Daß in C der gefährliche Querschnitt liegen muß, geht aber auch aus folgender Betrachtung hervor: Wie wir wissen, ist der gefährliche Querschnitt derjenige, in welchem bei genügend großer Belastung der Bruch eintreten würde; zunächst aber wird stets die Stelle brechen, welche die größte Durchbiegung erfährt, und das ist in diesem Falle da, wo die Last P hängt; also liegt auch dort der gefährliche Querschnitt. Das Moment gegen diesen Querschnitt C ist:

$$M_{max} = R_1 \cdot a = \frac{P\,(l-a)\,a}{l}$$

(siehe M. T. Tabelle III, 3).

4. Ein Balken an einem Ende fest eingespannt, am anderen frei aufliegend (halbeingespannter Träger), trage in der Mitte C die Last P (Fig. 82).

Fig. 82.

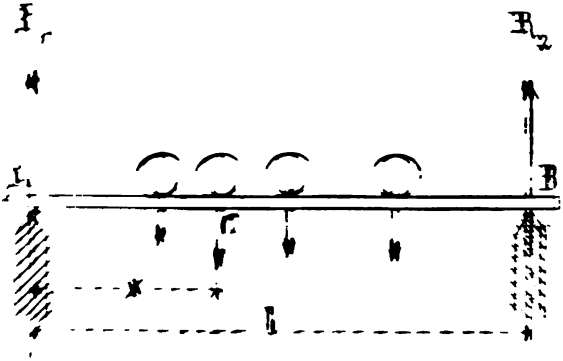


Die Bestimmung der Auflagerreaktionen R_1 und R_2 läßt sich hier nicht nach dem Hebelgesetz durchführen, da man den

[illegible] von [illegible] des Quer-
[illegible] Biegungsmoment von P
[illegible] die Last P
[illegible]

[illegible] Einzel-
[illegible] Lasten

Fig. [illegible]



gegen C [illegible] wirken, wenn sie alle möglichst nahe [illegible] Querschnitte C und eine Last über C [illegible]. Dasselbe gilt [illegible] von C befindlichen Lasten. Besonders un-[illegible] wirken, wenn die schwersten [illegible] Querschnitte C zunächst stehen, weil dann jedenfalls [illegible] in C am größten ist.

Da jede Last, wie wir oben gesehen haben, gegen den Querschnitt C ein + M hervorruft, so wird das Gesammtmoment gegen C um so größer, je größer die Anzahl der Lasten ist.

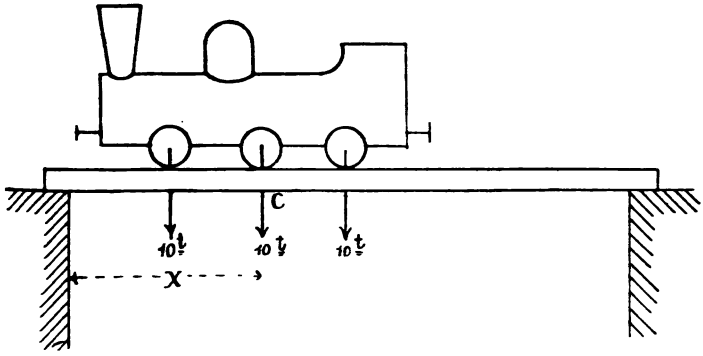
Es ergiebt sich hiernach folgende Bedingung für die ungünstigste Belastung eines beliebigen Querschnittes C:

> Die Lasten müssen zu beiden Seiten des Querschnittes möglichst konzentrirt gegen den Querschnitt liegen, derart, daß die schwersten Lasten sich dem Querschnitte zunächst befinden.

Bei einem Laſtenzuge, deſſen Achſen in feſten Entfernungen zu einander liegen, läßt ſich dieſe Bedingung nicht ſo ohne Weiteres ausführen. Nehmen wir z. B. eine dreiachſige Tendermaſchine mit angehängten Wagen an, von denen die erſtere 10tons Achsdruck, die letzteren 8tons Achsdruck haben mögen.

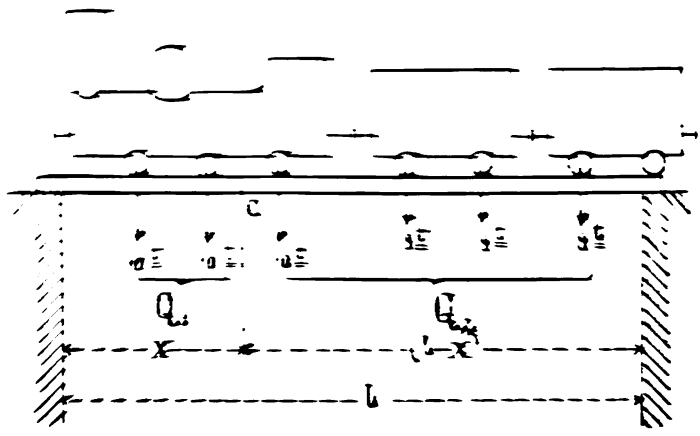
Die Lokomotive für ſich wird am ungünſtigſten für den Querſchnitt C ſtehen, wenn die mittlere Achſe über C liegt (ſiehe Figur 104).

Fig. 104.



Wenn aber außer der Lokomotive noch mehrere Wagen auf dem Träger ſtehen, ſo iſt doch die Lage der Lokomotivachſen allein nicht mehr maßgebend für die ungünſtigſte Belaſtung, ſondern es ſind die Achsdrücke der Wagen auch mit zu berückſichtigen; auch dieſe wirken am ungünſtigſten gegen den Querſchnitt, wenn ſie demſelben möglichſt nahe liegen. Eine ſolche Stellung der Wagen iſt aber nur dann möglich, wenn die Lokomotive nach links verſchoben wird (ſiehe Figur 105).

Es fragt ſich, wie weit muß die Lokomotive nach links verſchoben werden, damit dieſe und die Wagen zuſammen den



mäßig vertheilt, so beträgt die durchschnittliche Belastung links vom Querschnitt $\frac{20}{x}$ tons pro Längeneinheit.

Die Belastung rechts vom Querschnitt ist $= 10 + 3 \cdot 8 = 34$ tons. Diese auf die Länge $l - x$ gleichmäßig vertheilt gedacht, ergiebt als durchschnittliche Belastung rechts vom Querschnitt $\frac{34}{l-x}$ tons pro Längeneinheit.

Bezeichnet man allgemein die Summe der Einzellasten (Achsdrücke) links vom Querschnitte C mit Q_1 und diejenige rechts von C mit Q_2, so muß also zur Erreichung einer ungünstigen Belastung für den Querschnitt C der Zug so aufgestellt werden, daß

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{Q_2}{l - x} \text{ ist.}$$

Diese Bedingung wird sich in den meisten Fällen nicht erfüllen lassen, es wird meist $\frac{Q_1}{x} >$ oder $<$, aber nicht genau $= \frac{Q_2}{l - x}$ sein.

Um alsdann jener Bedingung möglichst zu entsprechen, muß man den Lastenzug nach der Seite verschieben, auf welcher die kleinere Last pro Längeneinheit liegt, so lange, bis die nächste Last über dem Querschnitte C steht.

Fassen wir die eben aufgestellten Bedingungen zusammen, so erhalten wir für die Bestimmung des max M eines beliebigen Querschnittes C folgende drei Regeln:

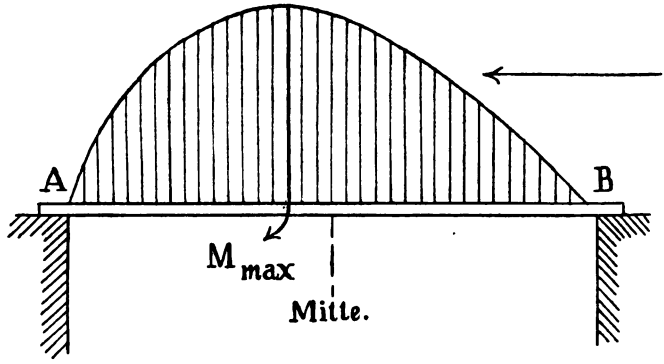
1. Der Lastenzug ist so aufzustellen, daß die schwersten Lasten in der Nähe des Querschnittes stehen.
2. Die durchschnittliche Belastung des Trägers links vom Querschnitt muß gleich derjenigen rechts vom Querschnitt sein.
3. Ist die durchschnittliche Belastung zu beiden Seiten des Querschnittes nicht gleich, so verschiebt man den Lastenzug nach der Seite, auf welcher die kleinere Last pro Längeneinheit liegt, so lange, bis die nächste Last über dem Querschnitt steht.

Nach diesem Verfahren bestimmt man für verschiedene Quer-

schnitte in dem mittleren Theile des Trägers das max M_x, und der größte der so gewonnenen Werthe ergiebt dann das M_{max}, welches für die Berechnung des erforderlichen Trägerquerschnittes maßgebend ist.

Dieses M_{max} liegt für einen Eisenbahnzug nicht etwa in der Mitte, sondern seitwärts. Würde man sich für einen von rechts nach links über den Träger fahrenden Eisenbahnzug das max M_x in den einzelnen Querschnitten als Ordinate auftragen, so erhielte man etwa das in Figur 106 dargestellte Bild.

Fig. 106.



Aus demselben geht hervor, daß der größte Werth d. h. M_{max} links der Mitte liegt.

Für einen Zug mit gleich großen Achsdrücken und symmetrischen Achsabständen würde natürlich das M_{max} in der Mitte liegen.

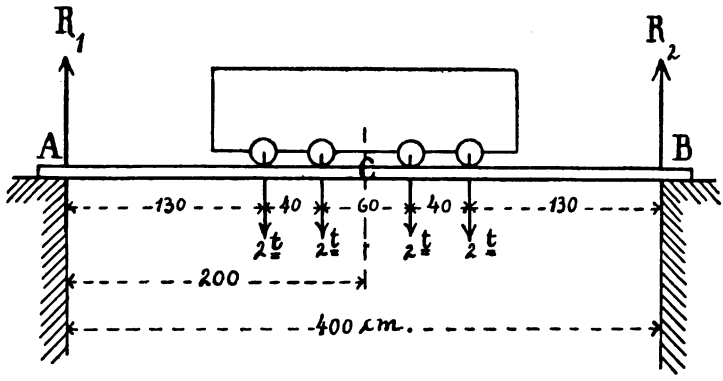
1. Beispiel:

Für einen Träger, befahren von einem vierachsigen Wagen mit 2tons Achsdruck, ist das M_{max} zu bestimmen (Fig. 107).

Da die Lasten gleich groß und symmetrisch liegen, so wird,

der Anschauung entsprechend, der gefährliche Querschnitt in der Mitte liegen müssen, die Lasten symmetrisch zu beiden Seiten vertheilt.

Fig. 107.



Es ist

$$Q_1 = Q_2 = 4\,\text{tons} = 4000\,\text{kg}$$

$$x = (l - x) = 200\,\text{cm},$$

und

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{Q_2}{l - x}.$$

Es ist also die zweite Regel erfüllt, folglich ist dies die ungünstigste Laststellung für den Querschnitt C; und zwar berechnet sich max M_c, wie folgt:

Es ist:

$$R_1 = R_2 = 4\,\text{tons} = 4000\,\text{kg}.$$

Mithin

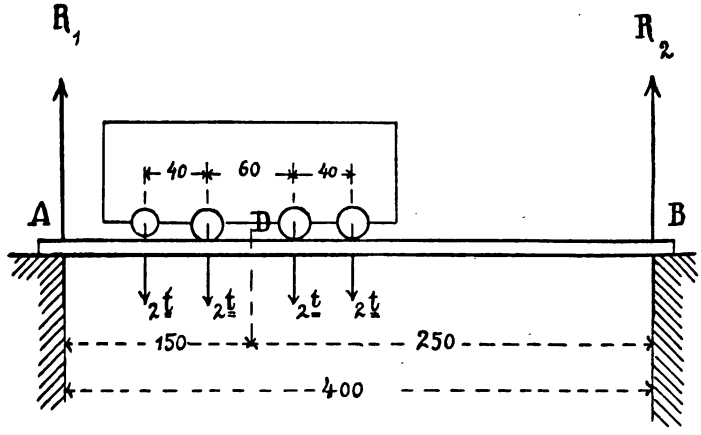
$$\max M_c = 4000 \cdot 200 - 2000 \cdot 70 - 2000 \cdot 30$$
$$= 600000\,\text{cmkg}.$$

Es sei hierbei Folgendes erwähnt:

Da der Achsdruck = 2 tons den Druck von zwei Rädern angiebt, so sind zur Aufnahme dieses Druckes auch mindestens zwei Träger bezw. Balken erforderlich; es bezieht sich daher das M_{max} auf den Gesammtquerschnitt der erforderlichen Tragbalken und nicht etwa auf einen einzigen Träger. (Siehe Beispiel Seite 163.)

Um uns davon zu überzeugen, daß max M_c wirklich = M_{max} ist, wollen wir das max M für einen Querschnitt D, 150 cm rechts von A, bestimmen (siehe Figur 108).

Fig. 108.



Damit gegen D die Lasten möglichst konzentrirt wirken, wird man dem Wagen die Stellung in Figur 108 geben.

Es ist dann

$$Q_1 = Q_2 = 4 \text{ tons} = 4000 \text{ kg}.$$

$$x = 150 \text{ cm}, \; l - x = 250 \text{ cm},$$

folglich

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{4000}{150} = 26{,}6 \text{ kg pro lfd. cm.}$$

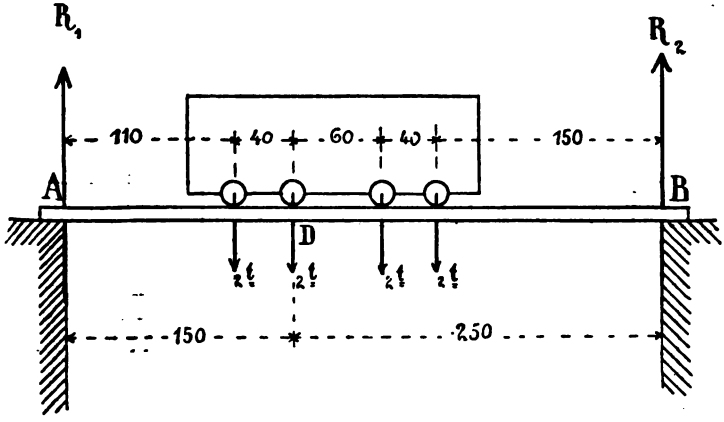
$$\frac{Q_2}{l - x} = \frac{4000}{250} = 16 \text{ kg pro lfd. cm.}$$

Es ist

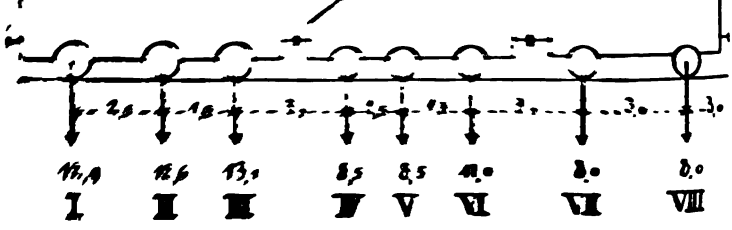
$$\frac{Q_2}{l - x} < \frac{Q_1}{x},$$

mithin muß man den Zug nach der Seite verschieben, auf welcher die kleinere Belastung pro lfd. cm liegt, d. h. nach rechts so weit, bis die zweite Achse über D steht. Die so gewonnene Lastenstellung (siehe Fig. 109) giebt die ungünstigste

Fig. 109.



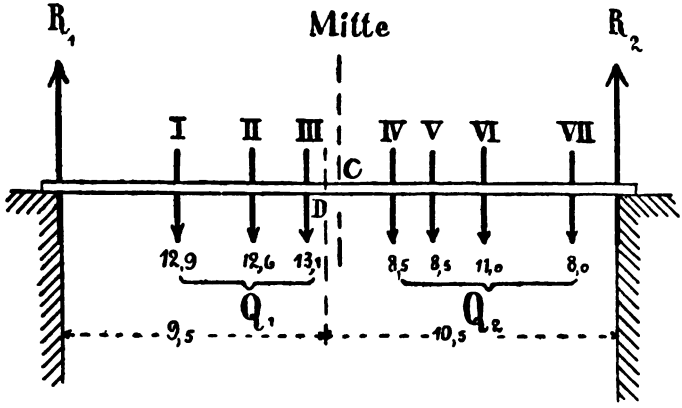
Belastung für den Querschnitt D; und das Moment max M_d wird folgendes:



Wir bestimmen zunächst für einen beliebigen Querschnitt II, 0,5 m links der Mitte C, die ungünstigste Laſtenſtellung.

Unter der Annahme, daß der Zug von rechts auffahre, wird derselbe soweit vorgehen müssen, daß die schwerste Last III = 13,1 t in der Nähe von D steht, und zwar links von D mit Rücksicht auf eine möglichst gleiche durchschnittliche Belastung. (Siehe Figur 111.)

Fig. 111.



Bei dieser Lastenstellung ist

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{12{,}9 + 12{,}6 + 13{,}1}{9{,}5} = \frac{38{,}6}{9{,}5}$$

$$= 4{,}06\,\text{t pro lfd. m}$$

$$\frac{Q_2}{l - x} = \frac{8{,}5 + 8{,}5 + 11{,}0 + 8{,}0}{10{,}5} = \frac{36}{10{,}5}$$

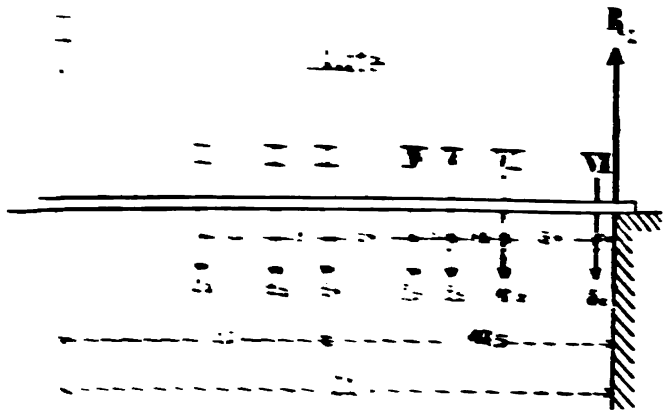
$$= 3{,}43\,\text{t pro lfd. m.}$$

Es ist also

$$\frac{Q_1}{x} > \frac{Q_2}{l - x},$$

[illegible] Art III über [illegible] des Lastenzuges [illegible] Fig. 112).

[illegible]



[illegible]

$$R_1 = \frac{1}{2}\,[illegible] + 8{,}5 \cdot 7{,}4$$

$$[illegible]$$

$$= [illegible]$$

[illegible]

$$\max M_2 = [illegible] - 12{,}9 \cdot 4{,}4 - 12{,}6 \cdot 1{,}9$$

$$= [illegible] \text{ mt.}$$

Wir wollen dieselbe Untersuchung anstellen für einen Querschnitt E, welcher 1,0 m von der Mitte entfernt liegt (siehe Fig. 113, Seite 133). Für diesen Querschnitt ergiebt sich als ungünstigste Belastung dieselbe Stellung des Lastenzuges wie vorher.

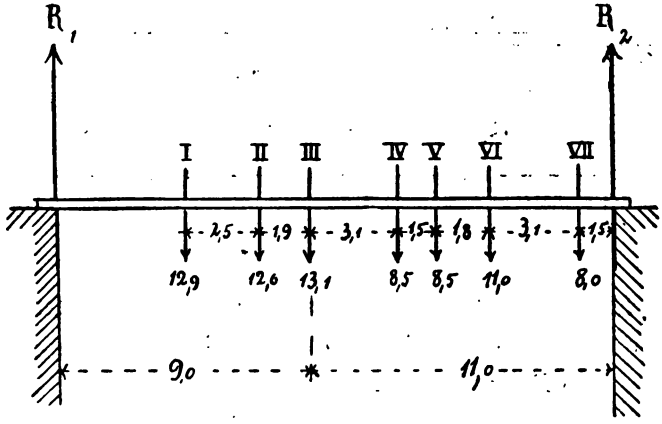
$$R_1 = \frac{1}{20}(12{,}9 \cdot 15{,}4 + 12{,}6 \cdot 12{,}9 + 13{,}1 \cdot 11{,}0 + 8{,}5 \cdot 7{,}9 + 8{,}5 \cdot 6{,}4 + 11{,}0 \cdot 4{,}6 + 8{,}0 \cdot 1{,}5)$$
$$= 34{,}47 \text{ t.}$$

$$\max M_e = 34{,}47 \cdot 9{,}0 - 12{,}9 \cdot 4{,}4 - 12{,}6 \cdot 1{,}9$$
$$= 229{,}53 \text{ mt.}$$

Es ist also

$$\max M_e > \max M_a.$$

Fig. 113.

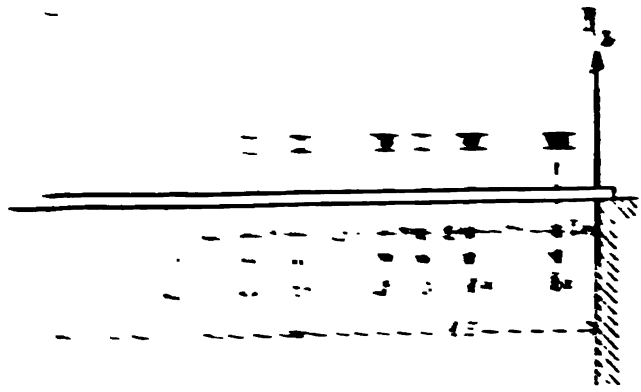


Für einen Querschnitt F, der 1,5 m links der Mitte liegt, ist die Lastenstellung analog (siehe Figur 114, Seite 134).

Es wird:

$$R_1 = \frac{1}{20}(12{,}9 \cdot 15{,}9 + 12{,}6 \cdot 13{,}4 + 13{,}1 \cdot 11{,}5 + 8{,}5 \cdot 8{,}4 + 8{,}5 \cdot 6{,}9 + 11{,}0 \cdot 5{,}1 + 8{,}0 \cdot 2{,}0)$$
$$= 36{,}3 \text{ t.}$$

[illegible]



[illegible] links der Mitte [illegible]

[illegible]

[illegible] M_{max} [illegible] Querschnittsdimensionen des Trägers zu bestimmen.

Wie uns dieses Beispiel zeigt, bestimmt man M_{max} durch Probiren; eine solche Probirmethode ist sehr umständlich, aber da nothwendig, wo es auf genaue Resultate ankommt, wie z. B. bei permanenten Brückenkonstruktionen. Für provisorische Bauten werden wir uns mit Annäherungswerthen begnügen können, die wir erhalten, wenn wir statt der Belastung durch einen Lasten-

zug, d. h. statt der fortschreitenden Einzellasten, eine fortschreitende, gleichmäßig vertheilte Last q_M pro lfd. Längeneinheit annehmen, welche dasselbe Maximal-Biegungsmoment hervorruft, wie jene.

Dieses q_M bestimmt man, wie folgt, anknüpfend an das letzte Beispiel:

Wir hatten gefunden, daß für eine 20 m freitragende Brücke, die durch eine Personenzugmaschine mit Wagen befahren werden soll, das $M_{max} = 230$ mt beträgt, und wollen eine gleichmäßig vertheilte Last q_M finden, welche im Stande ist, dasselbe M_{max} zu erzeugen.

Von den auf Seite 125 gegebenen drei Regeln kommt für eine gleichmäßig vertheilte Last nur die zweite in Betracht, und dieser wird entsprochen, wenn der Träger voll belastet ist, weil dann die durchschnittliche Belastung, d. h. pro Längeneinheit, zu beiden Seiten eines Querschnittes natürlich dieselbe ist. Für einen so belasteten, frei aufliegenden Träger ist aber, wie wir Seite 99 gesehen haben:

$$M_{max} = \frac{q_M \cdot l^2}{8}.$$

Wir erhalten mithin die Gleichung:

$$\frac{q_M \cdot l^2}{8} = 230 \text{ mt}$$

und hieraus folgt:

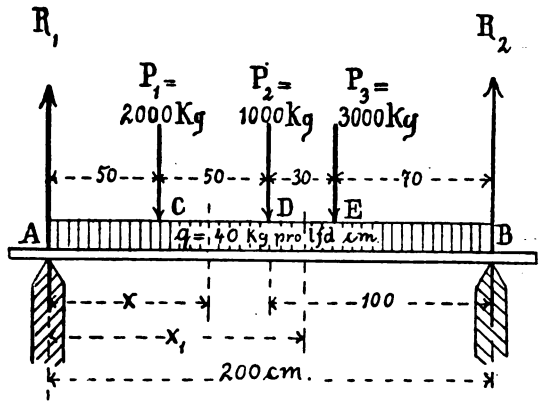
$$q_M = \frac{230 \cdot 8}{200 \cdot 200} = 4{,}6 \text{ t pro lfd. m}$$

$$= 46 \text{ kg pro lfd. cm.}$$

Aus der bisherigen Entwickelung ist wohl klar, daß dieser Werth q_M nur Gültigkeit haben kann für die gegebene Spannweite = 20 m und für die gegebene Zusammensetzung des Lastenzuges. Bei jeder anderen Spannweite und Zusammensetzung des

und D in der Entfernung x vom linken Auflager A, so müßte, wenn für diesen Querschnitt V = 0, d. h. die algebraische Summe

Fig. 99.



der an dem Balken links von diesem Querschnitt wirkenden Außenkräfte = 0 sein soll, die Gleichung bestehen:

$$R_1 = P_1 + q \cdot x$$

oder

$$7050 = 2000 + 40 \cdot x,$$

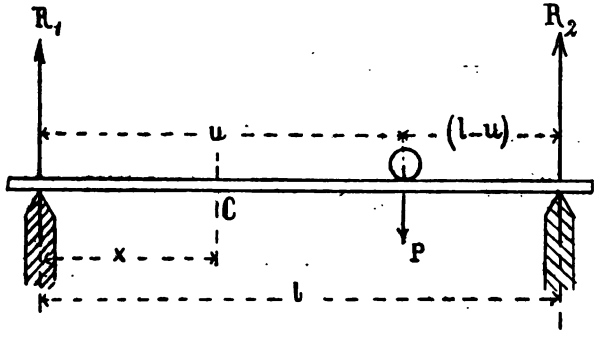
folglich

$$x = \frac{5050}{40} = 126{,}25 \text{ cm},$$

d. h. der gefährliche Querschnitt läge 126,25 cm vom linken Auflager entfernt, also zwischen D und E und nicht, wie wir angenommen, zwischen C und D. Für die Transversalkraft V eines Querschnittes zwischen D und E kommt aber noch die Kraft P_2 in Betracht, mithin ist die obige Gleichung, aus der wir x entwickelt haben, nicht die maßgebende.

Dieselbe muß für einen Querschnitt x_1 zwischen D und E vielmehr lauten:

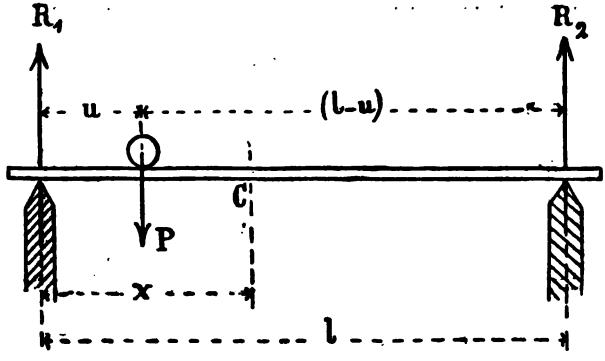
Fig. 115.



Je näher P an C heranrückt, um ſo größer wird, wie die letzte Formel zeigt, der Werth l — u und um ſo größer daher auch V_c. Für ſämmtliche Lagen der Laſt P rechts von C erreicht mithin die Transverſalkraft V_c ihr Maximum, wenn P unmittelbar rechts neben C liegt, und zwar ein + max.

Wenn nun P über C hinaus rollt, alſo links von C liegt, ſo wird (ſiehe Figur 116):

Fig. 116.



Nehmen wir zunächst an, es bestehe ein Querschnitt, für welchen $V = 0$ sei, so könnte dieser nur zwischen C und D liegen. Soll für einen solchen Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager die Transversalkraft $V = 0$ sein, so muß für ihn wieder die Gleichung gelten:

$$R_1 = P_1 + q \cdot x$$

oder

$$4450 = 2000 + 4 \cdot x$$

$$x = \frac{2450}{4} = 612{,}5 \text{ cm}.$$

Dieser Werth für x liegt außerhalb des Balkens, folglich kann der gefährliche Querschnitt nicht zwischen C und D liegen.

Zwischen D und B kann er auch nicht liegen, denn für sämmtliche Querschnitte zwischen D und B ist V negativ, da $(P_1 + P_2) > R_1$ ist. Folglich muß der gefährliche Querschnitt in D liegen. Für diesen ist:

$$V_d = +4450 - 2000 - 4 \cdot 50$$
$$= +2250.$$

Da unmittelbar rechts von D die Transversalkraft negativ wird, so besteht hier kein Querschnitt, für welchen $V = 0$; vielmehr findet in D, wie wir bei den Einzellasten gesehen, ein Uebergang von $+V$ in $-V$ mittelst Sprunges statt.

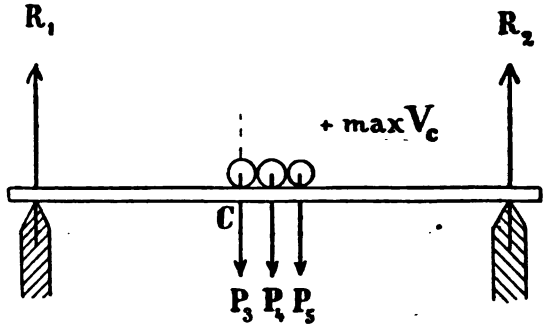
Allgemein können wir hiernach folgenden Satz aufstellen:

> Bei einem durch ruhende Belastung auf Biegung beanspruchten Balken liegt der gefährliche Querschnitt, d. h. M_{max}, dort, wo die Transversalkraft $= 0$ wird, bezw. von $+$ in $-$ springt.

Das für diesen Querschnitt zu berechnende M ist für die Ermittelung des erforderlichen Balkenquerschnittes maßgebend.

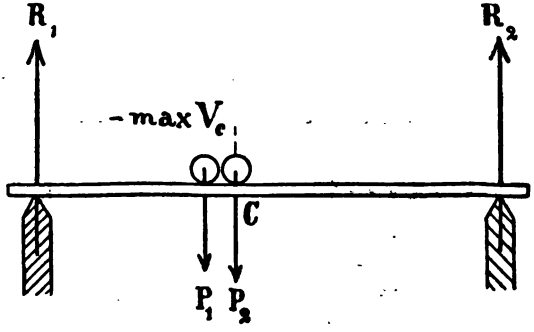
Transverſalkraft für den Querſchnitt C gleich der Differenz zwiſchen dem V_c rechts und dem V_c links von C ſein. Es geht hieraus hervor, daß dieſe Geſammt-Transverſalkraft am größten, wenn ſämmtliche Transverſalkräfte poſitiv ſind, d. h. wenn alle Einzellaſten rechts von C liegen und links keine Laſt; das V_c wird dann ein $+ \max V_c$ (ſiehe Figur 118).

Fig. 118.



Wenn die ſämmtlichen Laſten links von C liegen und rechts keine, ſo tritt nach Obigem für den Querſchnitt C das $- \max V_c$ ein (ſiehe Figur 119).

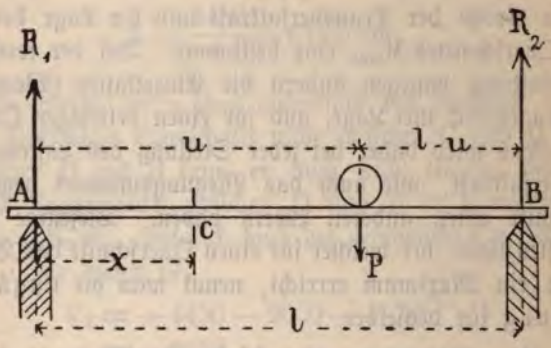
Fig. 119.



und M_{max} das Biegungsmoment gegen den gefährlichen Querschnitt bei der für diesen ungünstigsten Belastung.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie man die ungünstigste Belastung für einen beliebigen Querschnitt C ermittelt, und gehen aus von der Wirkung einer Einzellast P, welche über einen Balken von rechts nach links hinwegrollen möge (siehe Figur 101).

Fig. 101.



Wenn P rechts vom Querschnitt C steht, so ist für jede Stellung zwischen C und B das Moment gegen C:

$$M_x = R_1 \cdot x \quad \Big| \quad R_1 = P\,\frac{l-u}{l}$$

$$= \frac{l-u}{l}\,P \cdot x.$$

$l-u$ ist stets $+$, also auch M_x für jede Lage von P zwischen C und B positiv.

Wie aus der Formel ersichtlich, wird M_x um so größer, je größer $l-u$, d. h. je mehr sich P dem Querschnitt C nähert; und wenn P über C steht, ist $u = x$ und es wird

$$\max M_x = \frac{l-x}{l}\,P \cdot x$$

$$- \max V_c = R_1 - q\,x$$

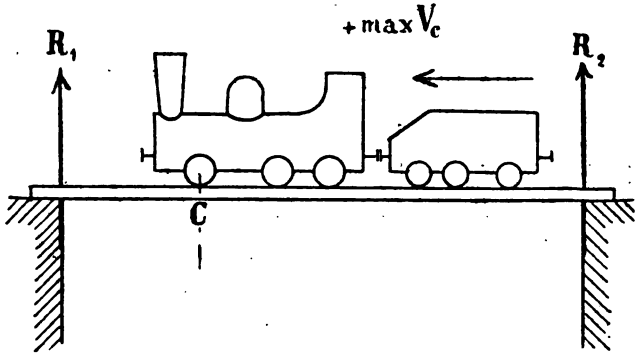
$$= \frac{1}{l} \cdot q\,x\left(l - \frac{x}{2}\right) - q\,x$$

$$= \frac{q\,x\,l}{l} - \frac{q\,x^2}{2\,l} - q\,x = - \frac{q\,x^2}{2\,l}.$$

Dasselbe Verhältniß haben wir bei einem Laftenzuge.

Denken wir uns Eisenbahnwagen auf der Brücke, so repräsentirt jedes Rad eine Einzellast; es wird also auch hier die Gesammt-Transversalkraft für C am größten sein, wenn sämmtliche Wagenachsen rechts von dem Querschnitt liegen. Und zwar wird dieselbe nach dem vorher Ausgeführten ein $+ \max V_c$, wenn der Zug von **rechts** kommend, mit den größten Laften voran, gerade bis zum Querschnitt C aufgefahren ist (siehe Figur 122).

Fig. 122.

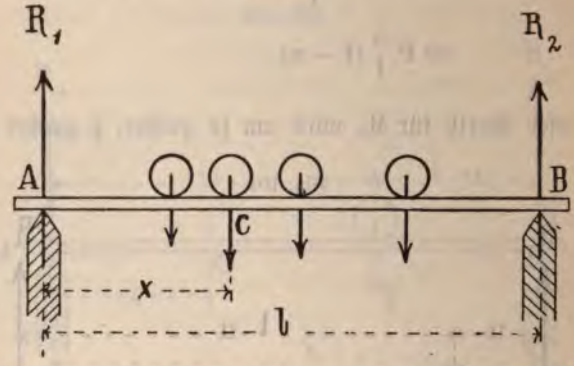


Analog dieser Ausführung entsteht für C ein $- \max V_c$, wenn der Zug von **links** kommend, mit den größten Laften an der Spitze, gerade bis zum Querschnitt C aufgefahren ist.

M_x war auch für jede Stellung von P rechts des Querschnittes C = +, es ist mithin das Biegungsmoment von P gegen den Querschnitt C stets +, wie auch die Last P liegen mag.

Denken wir nun statt der einen Last P mehrere Einzellasten (Fig. 103), so werden die rechts von C befindlichen Lasten

Fig. 103.



gegen C am ungünstigsten wirken, wenn sie alle möglichst nahe dem Querschnitte C und eine Last über C steht. Dasselbe gilt auch für die links von C befindlichen Lasten. Besonders ungünstig wird die Lastenstellung wirken, wenn die schwersten Lasten dem Querschnitte C zunächst stehen, weil dann jedenfalls die Durchbiegung in C am größten ist.

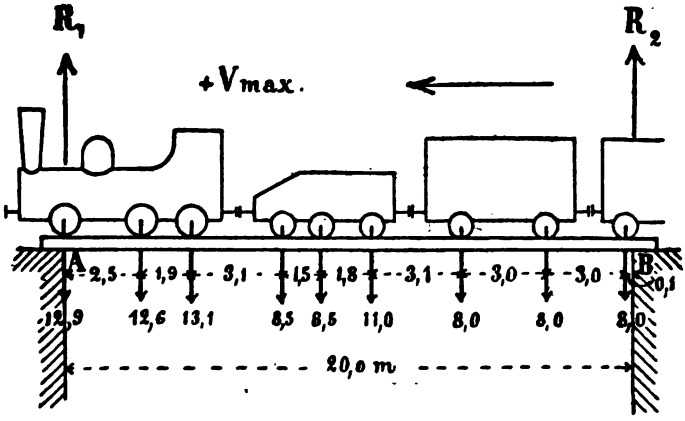
Da jede Last, wie wir oben gesehen haben, gegen den Querschnitt C ein + M hervorruft, so wird das Gesammtmoment gegen C um so größer, je größer die Anzahl der Lasten ist.

Es ergiebt sich hiernach folgende Bedingung für die ungünstigste Belastung eines beliebigen Querschnittes C:

> Die Lasten müssen zu beiden Seiten des Querschnittes möglichst konzentrirt gegen den Querschnitt liegen, derart, daß die schwersten Lasten sich dem Querschnitte zunächst befinden.

Die hierzu erforderliche Laſtenſtellung iſt die in Figur 123 gegebene.

Fig. 123.



Für dieſe iſt:

$$R_1 \cdot 20{,}0 = 12{,}9 \cdot 20{,}0 + 12{,}6 \cdot 17{,}5 + 13{,}1 \cdot 15{,}6 + 8{,}5 \cdot 12{,}5 + 8{,}5 \cdot 11{,}0 + 11{,}0 \cdot 9{,}2 + 8{,}0 \cdot 6{,}1 + 8{,}0 \cdot 3{,}1 + 8{,}0 \cdot 0{,}1$$

$$R_1 = \frac{1058{,}2}{20} = 52{,}91 \text{ t.}$$

Da $R_1 = V_{max}$, ſo iſt auch

$$V_{max} = 52{,}91 \text{ t.}$$

In ähnlicher Weiſe kann man für jeden beliebigen Querſchnitt C, unter Berückſichtigung der betreffenden Laſtenſtellung (ſiehe Figur 122), das $\max V_c = R_1$ errechnen.

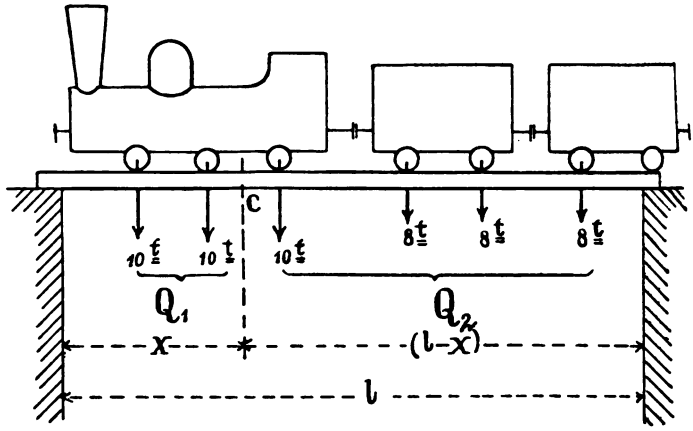
Um auch hier, wie bei der Beſtimmung des M_{max} (ſiehe Seite 135), von der jedesmaligen beſonderen Laſtenſtellung für die Max-Transverſalkraft eines Querſchnittes unabhängig zu

Querschnitt C besonders stark beanspruchen, also M_x möglichst groß werde?

Die ungünstigste Beanspruchung tritt dann ein, wenn die Vertheilung der Lasten zu beiden Seiten des Querschnittes derartig ist, daß die durchschnittliche Belastung des Trägers links vom Querschnitt gleich derjenigen rechts vom Querschnitt ist.

In Figur 105 liegt links vom Querschnitt die Belastung: $10 + 10 = 20$ tons; denken wir uns diese auf die Länge x gleich-

Fig. 105.



mäßig vertheilt, so beträgt die durchschnittliche Belastung links vom Querschnitt $\frac{20}{x}$ tons pro Längeneinheit.

Die Belastung rechts vom Querschnitt ist $= 10 + 3 \cdot 8 = 34$ tons. Diese auf die Länge $l - x$ gleichmäßig vertheilt gedacht, ergiebt als durchschnittliche Belastung rechts vom Querschnitt $\frac{34}{l-x}$ tons pro Längeneinheit.

Die den verschiedenen Spannweiten und Belastungsarten entsprechenden Werthe für q_v sind in M. T. Tabelle V zusammengestellt.

Es sei auch hier besonders hervorgehoben, daß die dort gegebenen Werthe q_v sich nur beziehen auf einen frei aufliegenden Träger und daher nur für einen solchen verwendbar sind. Für einen einseitig eingespannten Träger z. B. ist (siehe Seite 100) bei gleichmäßig vertheilter Belastung:

$$R_{max} = \frac{5}{8} q\, l.$$

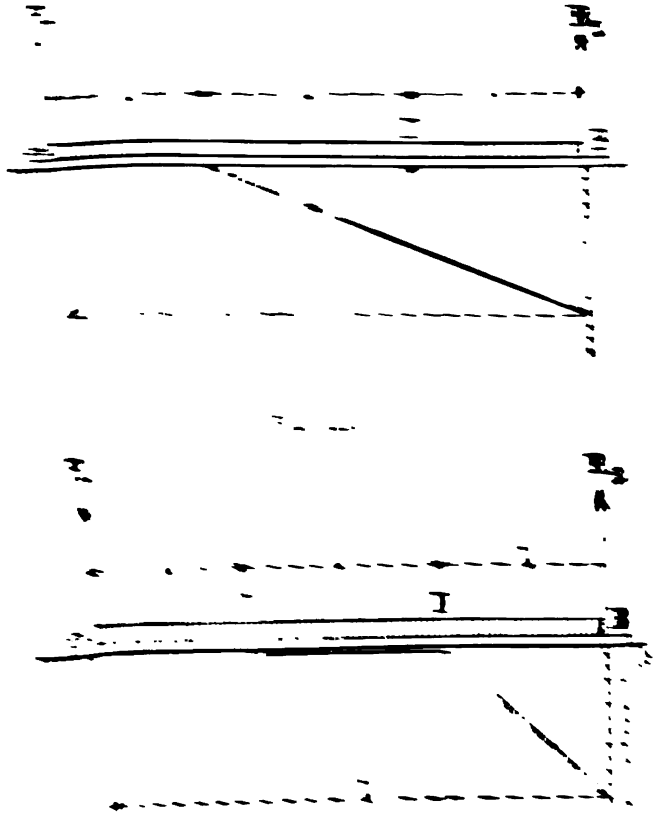
Wollte man daher für einen solchen Träger das q_v bestimmen, so müßte sein:

$$\frac{5}{8} q_v\, l = 52{,}91 \text{ kg},$$

und der aus dieser Gleichung gewonnene Werth q_v wäre ein anderer als der vorher, für einen frei aufliegenden Träger gefundene.

Für die Benutzung jener Tabelle V sei ferner auf Folgendes aufmerksam gemacht:

q_M und q_v beziehen sich stets nur auf die Trägerlängen von Unterstützung zu Unterstützung. Z. B. für ein doppeltes Sprengewerk oder ein Sprengewerk mit Spannriegel (siehe Fig. 124 und 125, Seite 146), bei denen doch C und D, ebenso wie A und B, Unterstützungspunkte sind, ist q_M und q_v für die Spannweite AC, bezw. CD, bezw. BD aus den Tabellen zu entnehmen und nicht etwa für die Spannweite AB = l, auch wenn, wie in Figur 125, der Träger durchgehend (kontinuirlich) angeordnet werden muß; und zwar q_M nur für die Bestimmung des erforderlichen Querschnittes der Träger AC, bezw. CD, bezw. BD (gleichviel ob dieselben einfache oder verdübelte Balken sind), und q_v nur zur Bestimmung der vertikalen Kräfte, also



$$M = \frac{q_M l_,^2}{8} \text{ bezw. } = \frac{q_M l_{,,}^2}{8},$$

wobei der Werth für q_M der Länge l, bezw. $l_{,,}$ entsprechen muß.

Die Stützdrücke würde man, wie folgt, berechnen:

Für die Auflagerreaktionen in A und B wird, ebenfalls ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes der Träger,

$$R_a = R_b = \frac{q_v l_,}{2}.$$

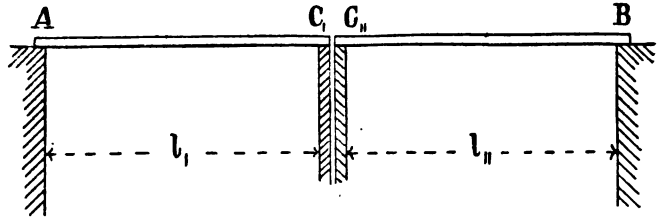
Für die Stützdrücke in C und D liegt der Schluß sehr nahe: Die Belastung der Länge l, (=l, q_v) vertheile sich zur Hälfte auf die Unterstützung A und zur Hälfte auf C; ebenso vertheile sich die Belastung der Länge $l_{,,}$ (=$l_{,,}$ q_v) zu gleichen Hälften auf C und D, so daß auf die Unterstützung C ein Auflagerdruck

$$R_c = \frac{l_, q_v}{2} + \frac{l_{,,} q_v}{2}$$

entfällt. Dieser Schluß ist für ruhende, gleichmäßig vertheilte Last auch vollkommen richtig, aber nicht für einen Lastenzug, wie folgende Untersuchung darlegen möge.

Wir können, unbeschadet der Größe von R_c, statt der gemeinsamen Unterstützung C jedes der in C gestoßenen Trägerenden für sich unterstützt denken durch C, bezw. $C_{,,}$ (siehe Fig. 126).

Fig. 126.



der Auflagerreaktionen in A und B und der Stützdrücke bezw. der Strebendrücke in C und D.

Fig. 124.

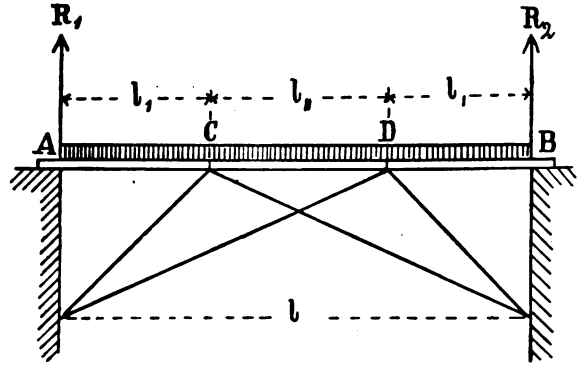
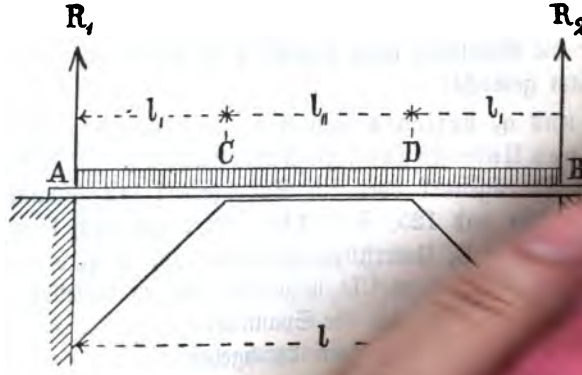


Fig. 125.



Nehmen wir in Figur 12
gestoßen (mit den Enden fre
Berücksichtigung des Eige
der Balken zu berechnen

$$M = \frac{q_M l_,^2}{8} \text{ bezw. } = \frac{q_M l_{,,}^2}{8},$$

wobei der Werth für q_M der Länge l, bezw. $l_{,,}$ entsprechen muß.

Die Stützdrücke würde man, wie folgt, berechnen:

Für die Auflagerreaktionen in A und B wird, ebenfalls ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes der Träger,

$$R_a = R_b = \frac{q_v l_,}{2}.$$

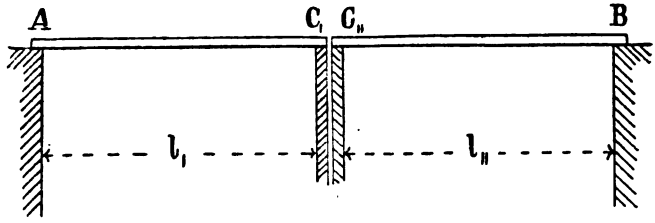
Für die Stützdrücke in C und D liegt der Schluß sehr nahe: Die Belastung der Länge $l, (= l, q_v)$ vertheile sich zur Hälfte auf die Unterstützung A und zur Hälfte auf C; ebenso vertheile sich die Belastung der Länge $l_{,,} (= l_{,,} q_v)$ zu gleichen Hälften auf C und D, so daß auf die Unterstützung C ein Auflagerdruck

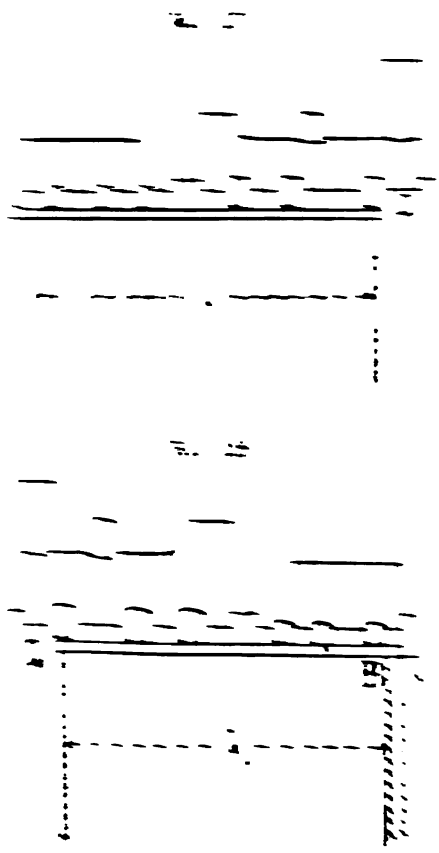
$$R_c = \frac{l, q_v}{2} + \frac{l_{,,} q_v}{2}$$

entfällt. Dieser Schluß ist für ruhende, gleichmäßig vertheilte Last auch vollkommen richtig, aber nicht für einen Lastenzug, wie folgende Untersuchung darlegen möge.

Wir können, unbeschadet der Größe von R_c, statt der gemeinsamen Unterstützung C jedes der in C gestoßenen Trägerenden für sich unterstützt denken durch C, bezw. $C_{,,}$ (siehe Fig. 126).

Fig. 126.





$$= \frac{q_v \, l}{2}$$

Analog wird die Auflagerreaktion über $C_{„}$ ein Max., wenn der Zug, von rechts kommend, bis $C_{„}$ aufgefahren ist (siehe Figur 128, Seite 148), und ist dann

$$= \frac{q_v l_{„}}{2}.$$

Soll also der Gesammt-Auflagerdruck über $C_{,}$ und $C_{„}$

$$= \frac{q_v l_{,}}{2} + \frac{q_v l_{„}}{2}$$

sein, so müßte über diesen Unterstützungen gleichzeitig die Vorderachse je einer von rechts und einer von links auffahrenden Lokomotive ruhen. Eine solche Lastenstellung ist aber für einen Träger und für einen Lastenzug unmöglich, da doch über zwei nebeneinander liegenden Punkten gleichzeitig nicht wohl zwei Achsen stehen können.

Wenn daher der Zug von rechts auffährt, so wird nur die Unterstützung $C_{„}$ ihr Max.

$$= \frac{q_v l_{„}}{2}$$

bei der Lastenstellung in Figur 128 erreichen; für $C_{,}$ kann dann aber das Max. der Figur 127 nicht eintreten. Ebenso wird, wenn der Zug von links auffährt, nur in $C_{,}$ das Max.

$$= \frac{q_v l_{,}}{2}$$

erreicht, nicht aber in $C_{„}$. Der obige Gesammt-Auflagerdruck kann mithin nie auftreten. Es ist hiernach einleuchtend, daß der Werth

$$R_c = \frac{q_v l_{,}}{2} + \frac{q_v l_{„}}{2}$$

stets größer ist, als der Wirklichkeit entspricht.

Will man den größten Auflagerdruck für die Zwischenunterstützung C genau bestimmen, so könnte dieses nur durch

Die Auflagerreaktionen werden

$$R_1 = \frac{3}{8} q\, l,$$

und

$$R_2 = \frac{3}{8} q\, l_{,,}.$$

Auf die Unterstützung B entfällt von der Spannweite l, ein Auflagerdruck

$$= \frac{5}{8} q\, l,$$

und von derjenigen $l_{,,}$ ein solcher

$$= \frac{5}{8} q\, l_{,,};$$

so daß:

$$R_2 = \frac{5}{8} q\,(l, + l_{,,}).$$

Wäre der Träger über B gestoßen, so hätten wir für beide Spannweiten frei aufliegende Träger, und für diese wäre ebenfalls:

$$M_{max} = \frac{q\, l,^2}{8} \text{ bezw. } = \frac{q\, l_{,,}{}^2}{8}.$$

Es ist mithin hier für die Bestimmung des erforderlichen Querschnittes gleichgültig, ob man den Träger über C als eingespannt auffaßt oder nicht.

Bei einem kontinuirlichen Träger auf vier Unterstützungen (siehe Figur 130, Seite 153) betrachtet man AB und CD als halbeingespannte Träger, also mit

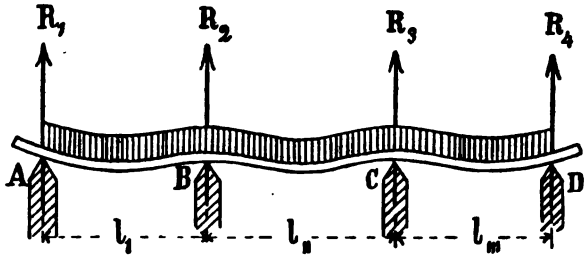
$$M_{max} = \frac{q\, l,^2}{8} \text{ bezw. } = \frac{q\, l_{,,,}{}^2}{8};$$

BC als einen ganz eingespannten Träger mit einem

$$M_{max} = \frac{q\, l_{,,}^{2}}{12}.$$

Soll der Querſchnitt des Trägers für alle Spannweiten konſtant ſein, ſo iſt das größere dieſer M_{max} für die Beſtimmung des erforderlichen Querſchnittes maßgebend. Sind die Spann-

Fig. 130.



weiten gleich, alſo $l_{,} = l_{,,} = l_{,,,}$, mithin die ganze Länge des kontinuirlichen Trägers $= 3\, l_{,,}$, ſo iſt der Balken zu berechnen aus der Gleichung

$$M_{max} = \frac{q\, l_{,}^{2}}{8},$$

d. h. ebenſo, als ob der Träger über den Unterſtützungen B und C geſtoßen ſei.

Die Auflagerreaktionen berechnet man nach Obigem wie folgt:

$$R_1 = \frac{3}{8}\, q\, l_{,}$$

$$R_2 = \frac{5}{8}\, q\, l_{,} + \frac{4}{8}\, q\, l_{,,}$$

$$= \frac{q}{8}\,(5\, l_{,} + 4\, l_{,,})$$

$$R_3 = \frac{4}{8} q l_{''} + \frac{5}{8} q l_{'''}$$

$$= \frac{q}{8} (4 l_{''} + 5 l_{'''})$$

$$R_4 = \frac{3}{8} q l_{'''}.$$

Diese soeben entwickelten Formeln für einen kontinuirlichen Träger haben einen angenähert richtigen Werth nur für gleichmäßig vertheilte, ruhende Last (also z. B. für einen über mehrere Oeffnungen gespannten, durchgehenden Balken, der eine Mauer zu tragen hat), nicht aber für fortschreitende Belastung (Eisenbahnzug). Für eine solche Belastung ist die Annahme, den Träger über den Zwischenunterstützungen als eingespannt zu betrachten, nur bedingungsweise gerechtfertigt. Das Charakteristische eines eingespannten Balkens ist doch die Bedingung, daß derselbe über der Unterstützung während des Hinüberfahrens eines Eisenbahnzuges in seiner horizontalen Lage verharrt. Diese Bedingung wird aber nur erfüllt, wenn eine der Achsen des Zuges über der Unterstützung steht. Bei jeder anderen Laststellung wird sich der Balken über der Unterstützung nach oben durchbiegen und daher nicht als eingespannt betrachtet werden dürfen.

Es erscheint deshalb empfehlenswerth, bei Berechnung eines kontinuirlichen Trägers jede Spannweite für sich als einen an den Enden frei aufliegenden Träger zu betrachten und hiernach das Biegungsmoment und die Vertikalkraft zu bestimmen.

Auch dürfte diese Auffassung geboten erscheinen mit Rücksicht auf die Verwendbarkeit der in M. T. Tabelle V enthaltenen Werthe q_M bezw. q_V, welche nur für einen frei aufliegenden Träger berechnet sind und daher ausschließlich für einen solchen Gültigkeit haben.

F. Belastung der Eisenbahn-Brücken.

Die Belastung einer jeden Brücke setzt sich zusammen aus dem Eigengewicht derselben und der Verkehrslast. Das Eigengewicht kann man als gleichmäßig vertheilte, ruhende Last $q_{„}$ auffassen und bestimmt es nach empirischen Formeln. Für hölzerne Brücken ist dasselbe für die verschiedenen Spannweiten in M. T. Tabelle V, Kol. 8 bezw. 6 tabellarisch zusammengestellt. Die Verkehrslast ist eine fortschreitende Belastung, und zwar wollen wir, wie wir gesehen haben, dieselbe auffassen als eine fortschreitende gleichförmige Belastung q_M bezw. q_V.

Diese beiden Belastungsarten zieht man, wie folgt, in Rechnung:

1. Bei direkter Belastung (Tragbalken):

a. Bestimmung des Maximal-Biegungsmomentes.

Die gleichmäßig vertheilte, ruhende Last $q_{„}$ erzeugt ein

$$M_{„\,max} = \frac{q_{„}\, l^2}{8};$$

Die fortschreitende, gleichförmige Belastung q_M erzeugt ein M_{max} bei voller Belastung des Trägers, und für diese wird

$$M_{M\,max} = \frac{q_M\, l^2}{8}.$$

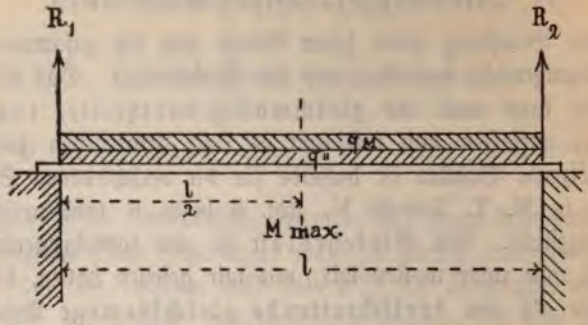
Das Gesammtbiegungsmoment M_{max} ist mithin gleich der Summe $M_{„\,max} + M_{M\,max}$, so daß bei Bestimmung des größten Biegungsmomentes eines einfachen Tragbalkens stets die Formel anzuwenden ist:

$$M_{max} = \frac{q_{„}\, l^2}{8} + \frac{q_M\, l^2}{8}$$

$$= \frac{(q_{„} + q_M)\, l^2}{8}$$ (siehe Fig. 131, Seite 156).

(Ueber das M_{max} bei verdübelten Trägern siehe Seite 197.)

Fig. 131.



b. Bestimmung der Maximal-Transversalkraft.

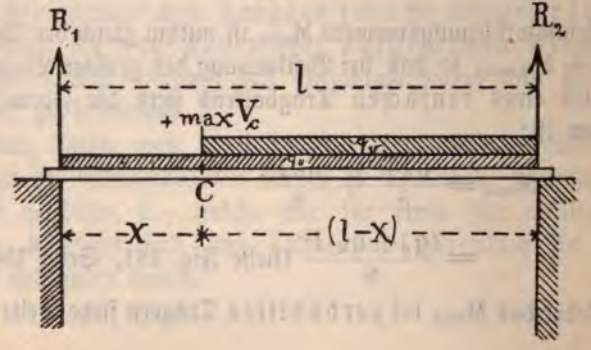
Wir wollen das + max V für den Querschnitt C (Fig. 132) ermitteln und müssen zu dem Zwecke zunächst die Größe R_1 kennen.

Das Eigengewicht $q_„$ erstreckt sich stets über die ganze Oeffnung l und erzeugt eine Auflagerreaktion:

$$R_{„1} = \frac{q_„ l}{2}.$$

In Folge der Verkehrslast q_v wird V für den Querschnitt C ein + max, wenn der Träger rechts von C voll belastet ist. Der Druck, welchen q_v auf das linke Auflager ausübt, ist mithin (siehe Fig. 132):

Fig. 132.



$$R_{v1} = \frac{1}{l} \cdot q_v (l - x) \frac{l - x}{2}$$

$$= \frac{q_v (l - x)^2}{2l}$$

Folglich ist der gesammte linke Auflagerdruck:

$$R_1 = \frac{q_{''} l}{2} + \frac{q_v (l - x)^2}{2l}$$

und die Transversalkraft für den Querschnitt C ist:

$$+ \max V_c = + R_1 - q_{''} x$$

$$= + \frac{q_{''} l}{2} + \frac{q_v (l - x)^2}{2l} - q_{''} x$$

$$= q_{''} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{q_v (l - x)^2}{2l}$$

(siehe M. T. Tabelle IV, Nr. 4).

max V erreicht seinen größten Werth, wenn der ganze Träger mit q_v belastet ist (siehe Seite 142); und zwar ist dann

$$V_{max} = R_{max} = \frac{q_{''} l}{2} + \frac{q_v l}{2}$$

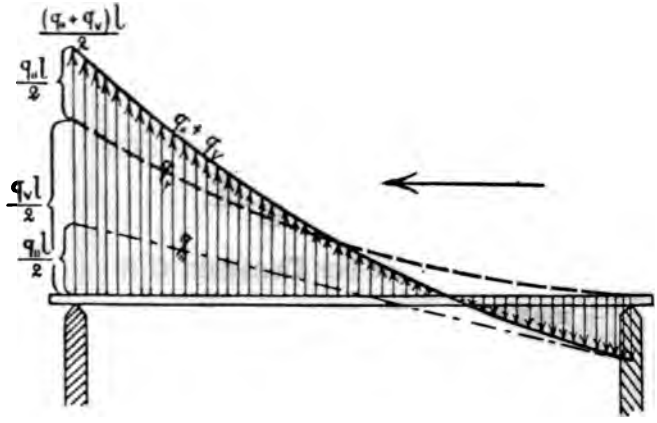
$$= \frac{(q_{''} + q_v) l}{2}.$$

Denken wir das $+ \max V_c$ für die einzelnen Querschnitte als Ordinaten aufgetragen, so erhalten wir unter der Voraussetzung, daß der Zug von rechts auffährt, das folgende Bild (siehe Figur 133, Seite 158).

In der Figur bedeutet:

—·—·—·— Kurve für das Eigengewicht $q_{''}$;
— — — — Kurve für die Verkehrslast q_v;
——————— Kurve für die Gesammtlast $q_{''} + q_v$.

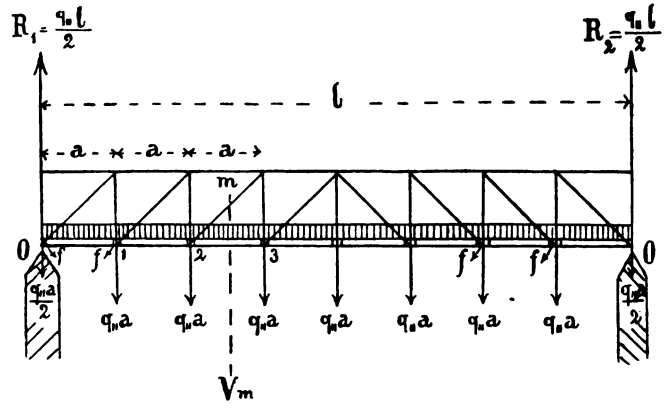
Fig. 133.



2. Bei indirekter Belastung.

Bisher haben wir angenommen, daß die Belastung auf dem Tragbalken liegt, also direkt auf den Tragbalken wirkt. Wenn jedoch, wie z. B. bei einem Fachwerkträger (Fig. 134),

Fig. 134.



die Last vermittelst Querträger f nur auf die Knotenpunkte des Trägers wirkt, so nennt man diese Art der Belastung eine indirekte.

Die Bestimmung des Maximalbiegungsmomentes erfolgt nach denselben Grundsätzen wie bei der direkten Belastung.

Die Maximal-Transversalkraft eines Querschnittes ermittelt man nach folgenden Gesichtspunkten:

Wir betrachten zunächst die Wirkung einer gleichmäßig vertheilten, ruhenden Last $q_{''}$ in Bezug auf die von ihr erzeugten Vertikalkräfte. Ist die Felderweite $= a$, so liegt zwischen je zwei Knotenpunkten eine Last $= q_{''} \cdot a$; diese vertheilt sich zu gleichen Theilen auf beide Knotenpunkte, so daß in den Endknotenpunkten O je eine Kraft $= \frac{q_{''} a}{2}$, in den übrigen Knotenpunkten je eine Kraft $= q_{''} a$ wirkt.

Die Auflager nehmen zu gleichen Theilen die ganze Last $= q_{''} l$ auf, folglich sind die Auflagerreaktionen

$$R_1 = R_2 = \frac{q_{''} l}{2}.$$

Wir können mithin den Träger als einen solchen mit Einzellasten auffassen und wissen (siehe Seite 111), daß zwischen je zwei Einzellasten die Vertikalkraft konstant ist.

Wir wollen die Vertikalkraft V_m im m^{ten} Felde bestimmen, unter der Annahme, daß der Träger n Felder habe, also $l = n a$ sei.

Es ist:

$$V_m = \frac{q_{''} l}{2} - \frac{q_{''} a}{2} - q_{''} a (m - 1)$$

$$= \frac{q_{''} n a}{2} - \frac{q_{''} a}{2} - q_{''} a (m - 1)$$

$$= \frac{a q_{''}}{2} (n - 1 - 2 m + 2)$$

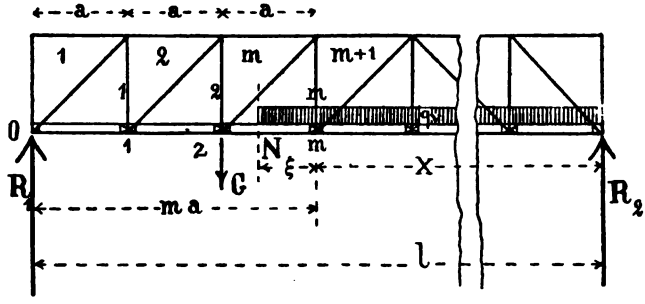
$$V_m = \frac{a\, q_v}{2}(n - 2m + 1)$$

(siehe M. T. Tabelle IV, Nr. 5).

Da wir das Eigengewicht einer Brücke als ruhende, gleichmäßig vertheilte Last auffassen können, so gilt die letzte Formel auch zur Bestimmung der durch das Eigengewicht im m^{ten} Felde erzeugten Vertikalkraft.

Die fortschreitende, gleichmäßig vertheilte Last (Verkehrslast q_v) erzeugt, wie bei der direkten Belastung, in einem beliebigen Querschnitte ein max V bei einseitiger Belastung. Indeß wird für den m^{ten} Knotenpunkt das V noch nicht ein Max., wenn die Last gerade bis zu diesem Knotenpunkt vorgerückt ist; es muß vielmehr der Lastenzug um eine bestimmte Strecke in das m^{te} Feld hineinfahren, damit V_m sein Max. erreiche, weil der Knotenpunkt m auch von diesem Felde noch einen gewissen Theil der Belastung aufnimmt (Fig. 135). Der

Fig. 135.



Punkt N, bis zu welchem der von rechts auffahrende Lastenzug in das Feld hineinrücken muß, damit in dem zuletzt überschrittenen Knotenpunkte die Transversalkraft ein Max. werde, heißt die Belastungsscheide des betreffenden Feldes. Die Entfernung ξ desselben von dem Knotenpunkte m ist:

$$\xi = \frac{a\,x}{l - a},$$

wie sich durch Rechnung nachweisen läßt.

Bei dieser Lastenstellung ist die linke Auflagerreaktion:

$$R_1 = \frac{1}{l} \cdot \frac{q_v\,(x+\xi)^2}{2}$$

$$= \frac{q_v \left(x + \frac{a\,x}{l-a}\right)^2}{2\,l}$$

$$= \frac{q_v}{2\,l}\left(\frac{l\,x - a\,x + a\,x}{l-a}\right)^2$$

$$= \frac{q_v\,l^2\,x^2}{2\,l\,(l-a)^2} = \frac{q_v\,l\,x^2}{2\,(l-a)^2}$$

Der in dem m^{ten} Felde liegende Theil der Belastung erzeugt in dem Knotenpunkte $(m-1)$ einen Druck G, und dieser ist, nach dem Gesetz für Bestimmung des Auflagerdruckes:

$$G = \frac{1}{a}\,\frac{q_v\,\xi^2}{2} = \frac{q_v}{2\,a}\,\frac{a^2\,x^2}{(l-a)^2} = \frac{q_v\,a\,x^2}{2\,(l-a)^2}.$$

Da die Transversalkraft V, wie wir wissen, bei einer bestimmten Lastenstellung für alle Querschnitte zwischen zwei Knotenpunkten konstant ist, so ist:

$$\max V_m = +R_1 - G$$

$$= \frac{q_v\,l\,x^2}{2\,(l-a)^2} - \frac{q_v\,a\,x^2}{2\,(l-a)^2}$$

$$= \frac{q_v\,x^2\,(l-a)}{2\,(l-a)^2} = \frac{q_v\,x^2}{2\,(l-a)}.$$

Bei einer gleichen Felderlänge a liegt der m^{te} Knoten-

punkt vom linken Auflager um ma entfernt; folglich ist dann $x = l - ma$, und es wird:

$$R_1 = \frac{q_v\, l\, (l - ma)^2}{2\,(l - a)^2}$$

$$G = \frac{q_v\, a\, (l - ma)^2}{2\,(l - a)^2},$$

und

$$\max V_m = \frac{q_v\, (l - ma)^2}{2\,(l - a)}.$$

Ist n = Anzahl der Felder, also $l = na$, so wird:

$$\max V_m = \frac{q_v\, (na - ma)^2}{2\,(na - a)} = \frac{q_v\, a^2\, (n - m)^2}{2\,a\,(n - 1)}$$

$$= \frac{a\, q_v}{2}\, \frac{(n - m)^2}{n - 1}.$$

(siehe M. T. Tabelle IV, Nr. 6).

Ueber Anwendung dieser Formeln für indirekte Belastung, sowie über Bestimmung des M_{max} bei solcher Belastung siehe das folgende 2. Beispiel.

1. Beispiel:

Ein doppeltes Sprengewerk (siehe Figur 136, Seite 163) soll für schwerste Belastung (drei Schlepptendermaschinen mit Wagen) berechnet werden. — Zur Verwendung kommen einfache (nicht verdübelte) Tragbalken, die über die ganze Oeffnung von 10 m hinweggreifen.

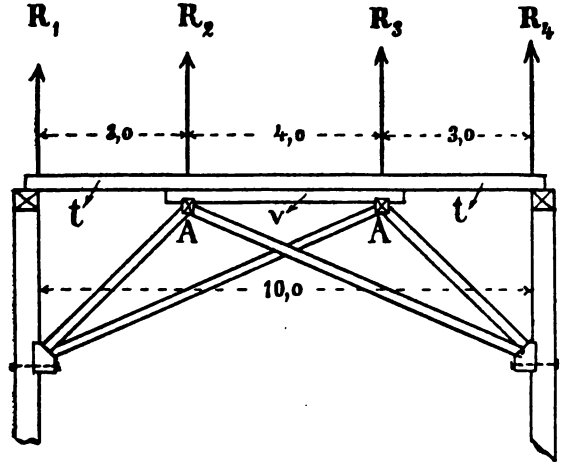
1. Berechnung des erforderlichen Querschnittes des Tragbalkens t.

Da der Querschnitt konstant sein soll, so muß man der Berechnung die größte Spannweite (hier = 4,0 m) zu Grunde legen.

Wir faſſen die mittlere Spannweite (ſiehe Seite 154) als einen an den Enden frei aufliegenden Träger auf, und für dieſen iſt:

$$M_{max} = \frac{(q_{„} + q_M)\, l^2}{8}.$$

Fig. 136.



Die Länge der Spannweite l iſt = 4,0 m = 400 cm; dieſer Länge entſpricht nach M. T. Tabelle Va,

$q_{„}$ = 8,4 kg pro lfd. cm Geleis
q_M = 110 kg pro lfd. cm Geleis,

alſo

$$M_{max} = \frac{(8{,}4 + 110) \cdot 400 \cdot 400}{8}$$

$$= 2368000 \text{ cmkg}.$$

Da die Werthe $q_{„}$ und q_M ſich auf das ganze Geleis (alſo beide Schienenſtränge) beziehen, ſo giebt uns M_{max} hier das Maximal-

[illegible] Balkens, wie er [illegible] wäre. Nun muß [illegible] Körper die [illegible]

$$M = V \cdot s$$

Für einen Balken von [illegible] Querschnitt ist

$$V = \frac{b\,h^2}{6}.$$

[illegible]

$$2368000 = \frac{b\,h^2}{6} \cdot 70.$$

Nimmt man, was meist zweckmäßig ist, die Höhe der zu verwendenden Balken als gegeben an, z. B.

$$h = 30 \text{ cm}.$$

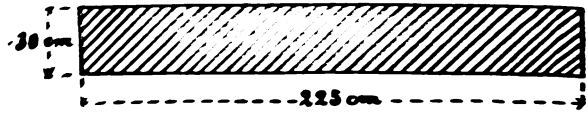
so wird

$$2368000 = b\,\frac{30 \cdot 30 \cdot 70}{6}$$

$$b = 225 \text{ cm}.$$

Es wäre mithin zur Aufnahme des Lastenzuges ein Balken erforderlich, dessen Querschnitt 225 cm breit und 30 cm hoch ist (Figur 137).

Fig. 137.



Da man aber natürlich einen Balken für eine Eisenbahnbrücke nicht gebrauchen kann, sondern deren mindestens zwei (unter

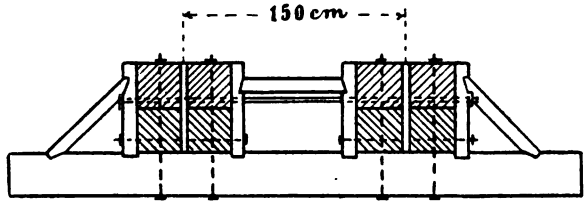
jedem Schienenstrange einen) haben muß, und da ferner ein Querschnitt 30/225 cm für Balken überhaupt wohl nicht besteht, so können wir das bis jetzt gewonnene Resultat nicht ohne Weiteres verwerthen.

Wie wir Seite 78 gesehen haben, kann man einen Balkenquerschnitt in der Breite b beliebig oft theilen (nicht aber in der Höhe h), ohne die Tragfähigkeit des Balkens zu verringern.

Runden wir daher die Breite b auf 240 cm ab und theilen b in acht gleiche Theile, so erhalten wir statt des einen Balkens 30/225 cm deren acht mit dem Querschnitt 30/30 cm.

Diese acht Balken vertheilt man zu je vier auf beide Schienenstränge und lagert sie dort in zwei Schichten zu je zwei Balken (siehe Fig. 138).

Fig. 138.



Das Verbindungsholz v (Figur 136) hat nur den Zweck, die beiden Sprengeböcke miteinander zu verbinden und eine Schwächung des Tragbalkens t durch Einkämmen ꝛc. zu verhindern, ist daher bei der Berechnung des erforderlichen Balkenquerschnittes nicht berücksichtigt worden, wiewohl dasselbe in Wirklichkeit die Tragfähigkeit der mittleren Spannweite erhöht. Man sieht aber zweckmäßig davon ab und kann deshalb den Querschnitt des Verbindungsholzes v durchaus beliebig wählen.

2. Bestimmung der Vertikalkräfte R_1, R_2, R_3 und R_4.

Die Auflagerdrücke ergeben sich (siehe Seite 157) nach der Formel:

$$R_1 = \frac{(q_{''} + q_v)\, l}{2}.$$

l ist hier = 3,0 m = 300 cm, und dieser Länge entspricht nach M. T. Tabelle Va

$q_{''} = 7{,}8$ kg pro lfd. cm Geleis,
$q_v = 147$ kg pro lfd. cm Geleis.

$$R_1 = R_4 = \frac{(7{,}8 + 147) \cdot 300}{2}$$

$$= 23\,220 \text{ kg}.$$

Diesen Druck muß also die Endunterstützung aufzunehmen im Stande sein, und danach ist letztere zu bestimmen, unter Berücksichtigung des von den Streben bewirkten Vertikaldruckes V (Seite 170).

Ferner ist (siehe Seite 150):

$$R_2 = R_3 = \frac{(q_{''} + q_v)\, 400}{2} + \frac{(q_{''} + q_v)\, 300}{4}$$

Der Länge von 400 cm entspricht:

$q_{''} = 8{,}4$ kg pro lfd. cm Geleis,
$q_v = 134{,}0$ kg pro lfd. cm Geleis,

Mithin:

$$R_2 = R_3 = \frac{(8{,}4 + 134) \cdot 400}{2} + \frac{(7{,}8 + 147) \cdot 300}{4}$$

$$= 40\,090 \text{ kg}.$$

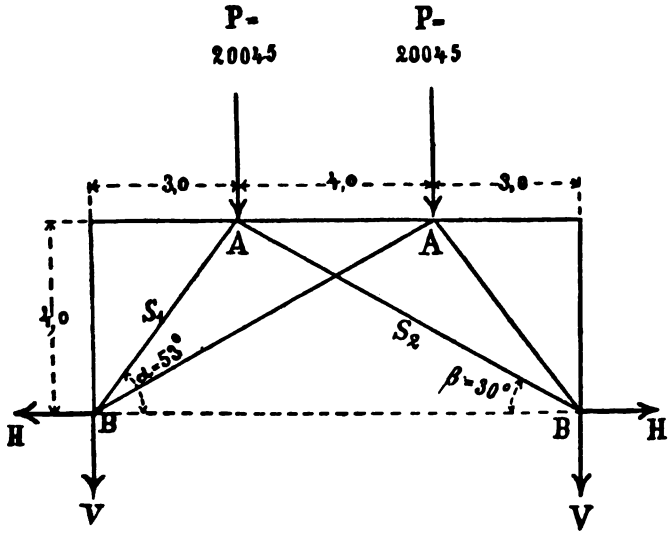
Es hat also jeder Knotenpunkt A einen vertikalen Gesammtdruck = 40090 kg aufzunehmen. Diese Knotenpunktslast ver-

theilt sich auf zwei Sprengeböcke (unter jedem Schienenstrang liegt einer), so daß jeder Sprengebock einen senkrechten Druck

$$P = \frac{40090}{2} = 20045 \text{ kg}$$

erfährt (siehe Figur 139).

Fig. 139.



Wie vertheilt sich dieser Druck P auf die beiden Streben S_1 und S_2?

Die axialen Strebendrücke S_1 und S_2 müssen mit P ein geschlossenes Kräftedreieck (siehe Seite 52) bilden, weil anders ein Gleichgewichtszustand in den Knotenpunkten A nicht möglich ist (siehe Figur 140, Seite 168). Aus diesem Dreieck ergiebt sich nach dem Satze: Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel:

Fig. 163.

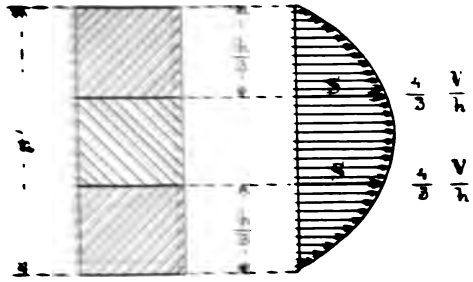


Fig. 164.

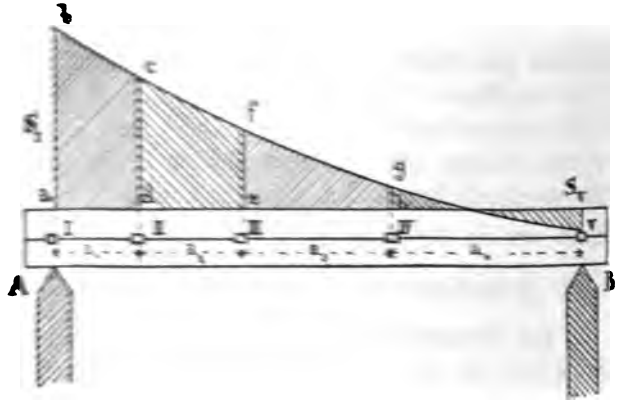
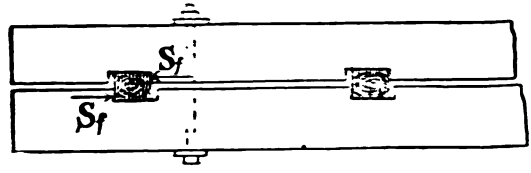


Fig 165.

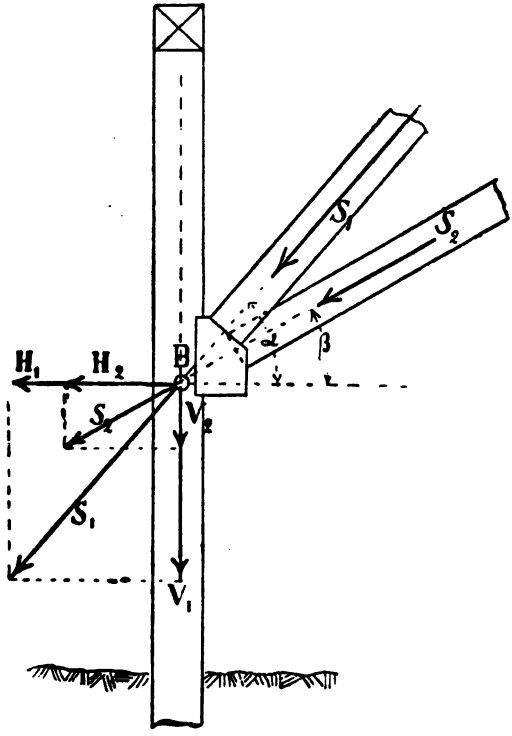


$$F_1 = \frac{17530}{k_n} \text{ und } F_2 = \frac{12148}{k_n},$$

wo k_n = Zerknickungsfestigkeits-Koeffizient (siehe Beispiel auf Seite 51, Figur 49).

Die Strebendrücke S_1 und S_2 bewirken in den Fußpunkten B einen Horizontalschub H und einen Vertikaldruck V auf die Endunterstützungen. Diese Kräfte erhält man, wenn man S_1 und S_2 im Punkte B in ihre Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegt (Figur 141). Die Vertikalkomponenten V_1 und V_2

Fig. 141.



$$p_{\text{[illegible]}} = 18.0 \text{ kg pro lfd. cm Geleis}$$

und

$$p_{\text{[illegible]}} = 51.0 \text{ kg pro lfd. cm Geleis,}$$

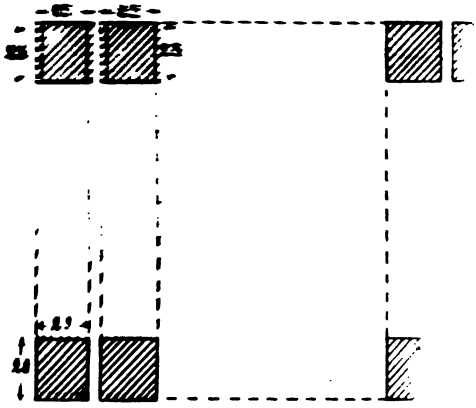
so wird:

$$F = \frac{51.0 - 18.0 \cdot 2000 \cdot 2000}{8 \cdot 70 \cdot 200}$$

$$= 2464 \text{ qcm.}$$

Ein solcher Querschnitt ist also erforderlich für Obergurt bezw. Untergurt, d. h. für beide Schien[illegible] [illegible] und [illegible] den Werth pro lfd. cm Geleis geben.

Fig. 144.



An den Gurtungsbalken treten in erste[illegible] bezw. Zugspannungen auf, wie dies auch [illegible] zeigt, man kann daher den Querschnit[illegible] ohne die Tragfähigkeit zu verringern. Es [illegible] eine Gurtung unter jedem Strange ein erfor[illegible]

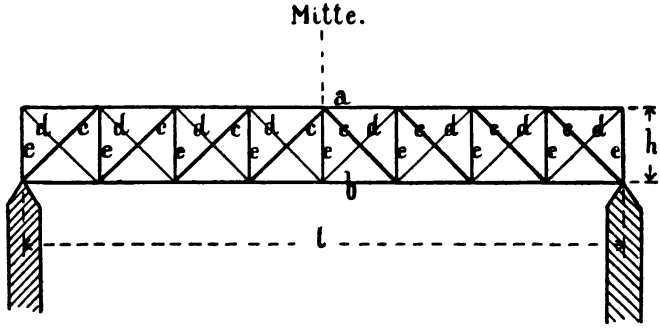
$$F_1 = \frac{2464}{2} = 1232 \text{ qcm.}$$

das in Figur 142 dargestellte Aussehen; er besteht aus folgenden wesentlichen Konstruktionstheilen:

1. den Gurtungen:
   Obergurt a,
   Untergurt b;
2. den Streben:
   Hauptstreben c,
   Gegenstreben d;
3. den Vertikalen e.

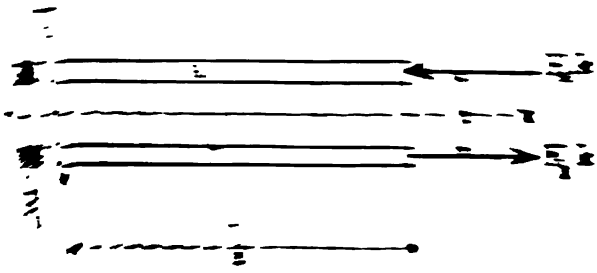
ad 1. Da die einzelnen Konstruktionstheile in den Knotenpunkten fest miteinander verbunden sind, so können wir uns

Fig. 142.



den Träger aus einem massiven Block herausgearbeitet denken, derart daß nur die in Figur 142 gezeichneten Theile stehen geblieben sind; ein solcher Träger, nach unten durchgebogen, wird sich ebenso verhalten, wie ein massiver Balken, d. h. die oberen Faserschichten werden sich zusammendrücken, die unteren sich dehnen.

Die oberen Faserschichten liegen aber im Obergurt, die unteren im Untergurt. Es wird also der Obergurt a auf



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Druck- [illegible] Zugspannungen [illegible] Obergurt und [illegible] Achse um des Trägers [illegible] die absoluten Größen [illegible] Zugspannung in den Gurtungen gleich sein [illegible] Seite 67).

Man kann ohne nennenswerthen Fehler annehmen, daß die Faserspannungen sich über den Querschnitt F_a bezw. F_b gleichmäßig vertheilen; es würde daher, wenn k = zulässige Spannung pro Flächeneinheit ist, die zulässige Beanspruchung des Querschnittes $F_a = F_a \cdot k$ und diejenige des Querschnittes $F_b = F_b \cdot k$ sein.

Da die Gurtungsquerschnitte gleich sein sollen, so ist $F_a = F^b = F$, und mit Bezug auf obiges Gesetz:

$$F_a \cdot k = F_b \cdot k = F \cdot k.$$

Denken wir die Gesammtfaserspannungen $F_a \cdot k$ bezw. $F_b \cdot k$ als Einzelkräfte in der Mitte der Gurtungsquerschnitte, deren mittlerer Abstand = h sei, wirkend, so erhalten wir als innere, widerstehende Kräfte das Kräftepaar $F \cdot k$ am Hebelarm h, und dessen Moment ist $= F \cdot k \cdot h$.

Das Moment dieses inneren Kräftepaares muß demjenigen der äußeren Kräfte, d. h. dem Biegungsmoment, das Gleichgewicht halten, d. h. es muß sein:

$$M_{max} = F \cdot k \cdot h$$

oder

$$\frac{(q_M + q_{„})l^2}{8} = F \cdot k \cdot h,$$

mithin der Gurtungsquerschnitt

$$F = \frac{(q_M + q_{„})l^2}{8 \cdot k \cdot h}.$$

Wählen wir in unserem Beispiel

$$h = \frac{l}{10} = 2{,}0\,\text{m},$$

$$k = 70\,\text{kg pro qcm}$$

und nach M. T. Tabelle Va für $l = 20\,\text{m}$

Wählen wir die Breite des Dübels β stets $= 0{,}4\ h_1$ (h_1 = Balkenhöhe und h = Trägerhöhe), so wird:

$$80\,\delta = 20\,\beta = 20 \cdot 0{,}4\ h_1$$
$$\delta = 0{,}1\ h_1,$$

und die Dübelhöhe $2\,\delta = 0{,}2\ h_1$; also das Verhältniß der Breite zur Höhe des Dübels $= 2 : 1$.

3. Berechnung der erforderlichen Anzahl von Dübeln.

Da die Träger von beiden Seiten her befahren werden, müssen die Dübel gegen die Mitte symmetrisch angeordnet werden; wir wollen daher nur die eine Trägerhälfte und zwar nur die linke betrachten.

Die von den Dübeln einer Fuge aufzunehmende Gesammtschubkraft wird, unter der Voraussetzung eines von rechts auffahrenden Zuges, dargestellt durch die in Figur 162 (Seite 199) gegebene Fläche, deren obere Begrenzung eine Parabel ist. Man kann, ohne erheblichen Fehler, statt der Parabel als oberen Begrenzungslinie eine Gerade annehmen und erhält dann als Schubkraftfläche für den halben Träger ein Trapez.

Sind S_r und S_m die horizontalen Schubkräfte über dem linken Auflager bezw. in der Mitte, so ist der Inhalt dieses Trapezes (siehe Figur 167, Seite 207):

$$J = \frac{S_r + S_m}{2}\,\frac{l}{2}$$
$$= \frac{(S_r + S_m)\,l}{4}$$

Von dieser Gesammtschubkraft kann ein Dübel aufnehmen einen Antheil von (siehe Seite 202):

$$S_f = \beta\,b \cdot 20 = 0{,}4\ h_1\,b \cdot 20$$
$$= 8\,b\,h_1.$$

Rechnen wir für die Durchbohrungen, Einkämmungen ꝛc. noch 15% Zuſchlag hinzu, ſo wird:

$$F_1 = 1232 + 15 \cdot 12{,}32 = 1416{,}8 \text{ qcm.}$$

Wählt man zwei Balken pro Gurtung, ſo erhält man einen Balkenquerſchnitt $= 708{,}4 \sim 25/28$ cm, ſo daß die Anordnung der Gurtungsbalken das in Figur 144 (Seite 174) dargeſtellte Bild ergiebt.

ad 2.

α. Die Hauptſtreben.

Für die Streben eines voll belaſteten Gitterträgers ſei allgemein bemerkt, daß die nach der Mitte hin anſteigenden Streben (Fig. 145) gedrückt und die nach der Mitte hin fallenden (Fig. 146) gezogen werden.

Fig. 145.

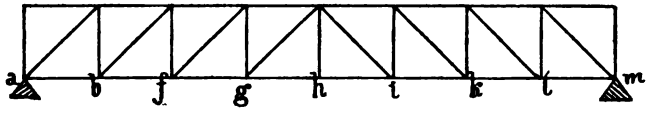
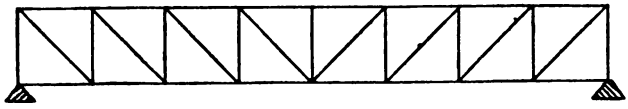


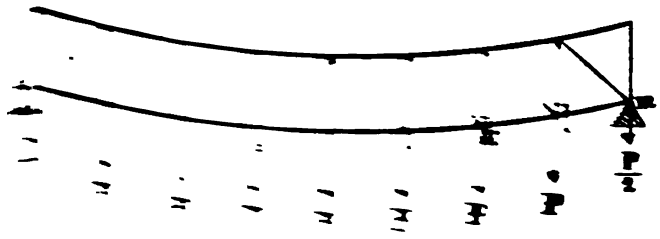
Fig. 146.



Für ein Syſtem nach Figur 145 kann man daher hölzerne (Druck-)Streben anwenden, und für ein Syſtem nach Figur 146 eiſerne (Zug-)Streben. Die hier angegebenen Streben nennt man die Hauptſtreben des betreffenden Syſtems. Bei einem Stabſyſtem mit einer ungeraden Anzahl von Feldern liegen in dem mittelſten Felde zwei ſich kreuzende Hauptſtreben.

[illegible] Druckstreben, [illegible] voller Be- [illegible] sich, wie folgt, [illegible]

[illegible] Figur 147



[illegible] eine indirekte [illegible] des Trägers; [illegible] Belastung in [illegible] nachdem die [illegible] = P wirkend [illegible] Verschiebung der [illegible]

[illegible] Verschiebung nach [illegible] verbunden [illegible] der auch [illegible] bewegen [illegible] möglich, wenn [illegible] wenn die Strebe c_1 [illegible]

Der Punkt f liegt [illegible] eine solche Abwärts-verschiebung des Punktes f gegen b bedingt aber eine Verkürzung der Strebe c_2, folglich wird auch diese auf Druck beansprucht.

Ebenso liegt der Punkt h der Mitte tiefer als i; diese Verschiebung ist nur möglich, wenn die Strebe c_5 gedrückt wird. Dasselbe gilt für alle übrigen nach der Mitte ansteigenden Streben.

Es ist hiernach wohl einleuchtend, daß die entgegengesetzt gerichteten Streben (Fig. 146) durch die volle Belastung auf Zug beansprucht werden.

Aus der bisherigen Betrachtung geht hervor, daß, wenn die Hauptstreben gedrückt werden, die Vertikalen e auf Zug beansprucht werden müssen und umgekehrt; und zwar wird der Druck in den Streben um so größer, je größer der Zug in den Vertikalen. Nun wissen wir, daß die Vertikalkraft eines voll belasteten Trägers von der Mitte nach den Enden zunimmt, also in den Endfeldern am größten ist (siehe Seite 114); folglich wird auch die Hauptstrebe in dem Endfelde am meisten beansprucht.

Will man daher, wie es sich der Einfachheit halber bei Holzkonstruktionen empfiehlt, sämmtlichen Hauptstreben gleiche Abmessungen geben, so ist für die Berechnung derselben die Beanspruchung der Endstrebe maßgebend, und diese ist folgende:

Bei indirekter Belastung ist die Vertikalkraft V_m im m^{ten} Felde infolge des Eigengewichts (siehe Seite 160):

$$V_{\prime\prime m} = \frac{a\, q_{\prime\prime}}{2}(n - 2m + 1),$$

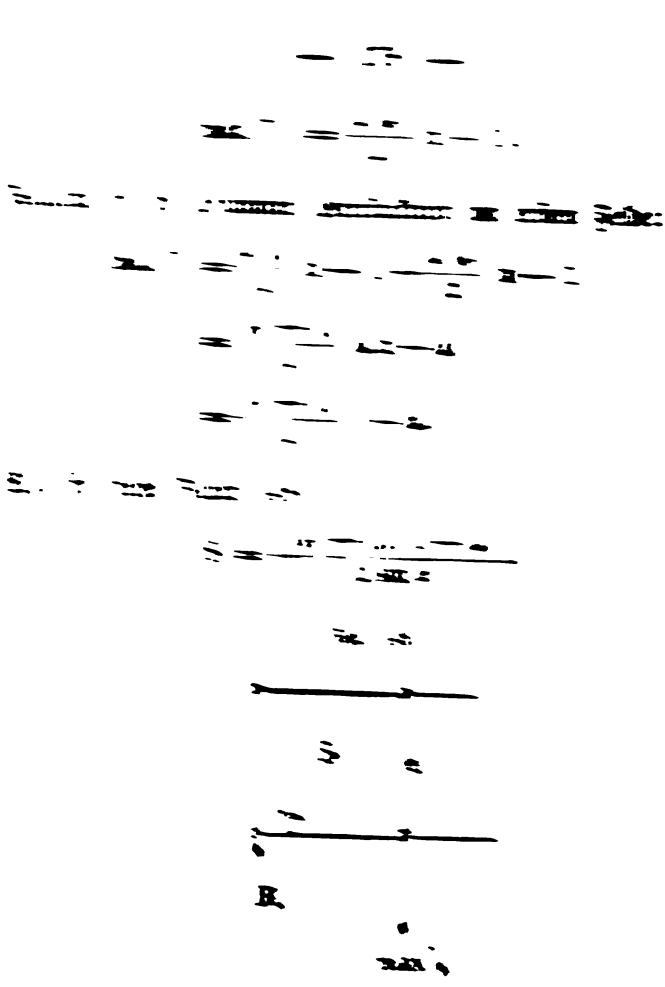
mithin im ersten Felde:

$$V_{\prime\prime 1} = \frac{a\, q_{\prime\prime}}{2}(n - 1).$$

Durch die fortschreitende Belastung q_v wird im m^{ten} Felde (siehe Seite 162):

$$\max V_{vm} = \frac{a\, q_v}{2} \cdot \frac{(n-m)^2}{n-1},$$

mithin im ersten Felde:



Da q_1 und q_2 sich auf das ganze Gebäude beziehen, so giebt S_1 die Spannung einer einzigen gedachten Hauptstrebe im ersten Felde, für beide Tragwände zusammen.

Wenn man in jedem Felde einer Tragwand 2 Hauptstreben anordnet, so vertheilt sich S_1 auf 4 Streben, und es hat daher jede derselben eine Spannung aufzunehmen:

$$\frac{S}{4} = \frac{(q_v + q_{„}) (l - a)}{8 \sin \alpha}.$$

Um dieſer Spannung widerſtehen zu können, muß die Strebe einen Querſchnitt haben:

$$F_1 = \frac{(q_v + q_{„}) (l - a)}{8 \sin \alpha \cdot k_{„}}.$$

Es iſt $l = 2000$ cm, dementſprechend

$q_v = 61{,}7$ kg pro lfd. cm Geleis
$q_{„} = 18{,}0$ kg pro lfd. cm Geleis

$$\sin \alpha = \sin 45^0 = 0{,}7$$

$$a = \frac{l}{10} = 200 \text{ cm},$$

alſo

$$F_1 = \frac{(61{,}7 + 18{,}0) (2000 - 200)}{8 \cdot 0{,}7 \cdot k_{„}}$$

$$= \frac{25\,618}{k_{„}}.$$

Die Länge l der Strebe ergiebt ſich aus der Konſtruktionszeichnung; ſie ſei hier = 250 cm. In welcher Weiſe man $k_{„}$ ermittelt, darüber ſiehe Beiſpiel auf Seite 53.

Es ergiebt ſich für $k_{„} = 53$ kg, ein $F_1 \sim {}^{22}/_{22}$ cm.

Dieſen Querſchnitt erhalten alle Hauptſtreben.

β. Die Gegenſtreben.

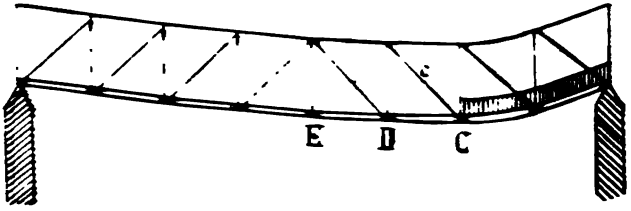
Zweck derſelben:

Wir haben geſehen, daß bei voller Belaſtung des Trägers die nach der Mitte hin ſteigenden Diagonalen ſämmtlich gedrückt werden. Anders iſt es, wenn der Träger nur theilweiſe belaſtet iſt.

Nehmen wir an, der Zug fahre von rechts auf, bis zum

Knotenpunkte C (Fig. 149), so wird der Punkt C sich gegen den Punkt D nach abwärts verschieben (die Durchbiegungskurve ist hier natürlich anders geformt, als bei voller Belastung), d. h. die Strebe e muß sich dehnen, sie wird gezogen. Rückt der Zug bis zum Knotenpunkte D vor, so wird dieser sich gegen den Punkt E nach abwärts bewegen, d. h. die Strebe zwischen D und E wird auf Zug beansprucht. Allgemein wird ein von rechts aufführender Zug der Reihe nach sämmtliche Haupt-

Fig. 149.



streben rechts der Mitte auf Zug beanspruchen; kommt der Zug von links, so werden sämmtliche Hauptstreben der linken Hälfte gezogen.

Der allgemeine Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ist im § 11 (Seite 231 ꝛc.) ausgeführt.

Das Eigengewicht, welches wir als eine über den ganzen Träger gleichmäßig vertheilte Last auffassen, wird, wenn es allein, also ohne Zugbelastung wirkt, sämmtliche Hauptstreben nur auf Druck beanspruchen.

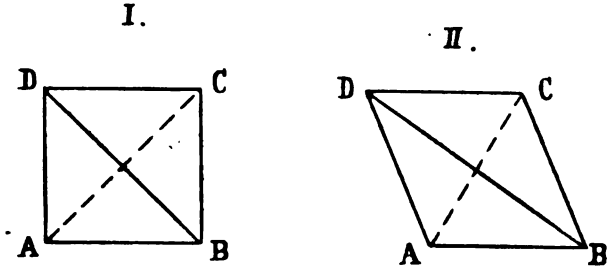
Es wird mithin der Fall eintreten, daß eine Hauptstrebe durch das Eigengewicht gedrückt und gleichzeitig durch die Zugbelastung gezogen wird; es kommt dann darauf an, durch die Rechnung zu untersuchen, welche der Beanspruchungen die größere ist.

Allgemein ist in den mittleren Feldern die Beanspruchung der Hauptstreben infolge des Lastenzuges stets größer als

diejenige durch das Eigengewicht, so daß also bei einem Howeschen Träger die algebraische Summe der Spannungen in den Hauptstreben der mittleren Felder stets eine Zugspannung ergiebt. Da man aber eine Beanspruchung der hölzernen Streben auf Zug aus konstruktiven Rücksichten vermeiden will, so wendet man in den Feldern, wo die Zugspannung überwiegt, Gegenstreben an, die diese Zugspannung als Druck aufnehmen und dadurch die Hauptstreben entlasten, wie folgende Betrachtung ergeben möge:

Wir denken eines der mittleren Felder ABCD aus dem Träger herausgeschnitten (siehe Fig. 150); der Zug komme von

Fig. 150.



rechts, und die Diagonale BD erleide eine Zugspannung. Wenn BD gezogen wird, so wird die Länge BD eine größere, d. h. die Punkte B und D entfernen sich. Eine solche Entfernung der Punkte B und D ist aber nur möglich, wenn A und C sich nähern, so daß das Feld aus der Form I in die Form II übergeht.

Fügen wir nun in das Feld noch eine zweite Diagonale (Gegendiagonale) AC ein, so wird diese, wenn BD gezogen wird, durch die sich nähern wollenden Ecken A und C gedrückt. AC wird also den ganzen Zug, den BD

Mithin ist der Dübelabstand:

$$a = \frac{l}{2\,r} = \frac{500}{12} = 40 \text{ cm}.$$

$$a_{min} = 1,2\,h_{,} = 1,2 \cdot 30 = 36 \text{ cm}.$$

Die Vertheilung der Dübel ist in Figur 169 (Seite 213) dargestellt.

Wir haben bisher angenommen, daß sämmtliche Balken gleiche Abmessungen haben. Wenn man Balken von verschiedenen Höhen, aber derselben Breite miteinander verdübelt, so ist die Bestimmung des erforderlichen Querschnittes analog der auf Seite 196 angegebenen.

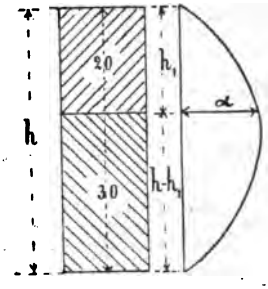
Ebenso wird der Dübelabstand a nach denselben Grundsätzen ermittelt wie bei verdübelten Trägern mit gleich hohen Balken; der Koeffizient α der horizontalen Schubkraft ist nach der allgemeinen Gleichung des Parabel-Abschnittes (siehe Seite 195) zu bestimmen:

$$\alpha = \frac{6\,h_{,}\,(h - h_{,})}{h^2}.$$

Ist z. B. in Figur 170:

$$h = 50 \text{ cm und } h_{,} = 20 \text{ cm},$$

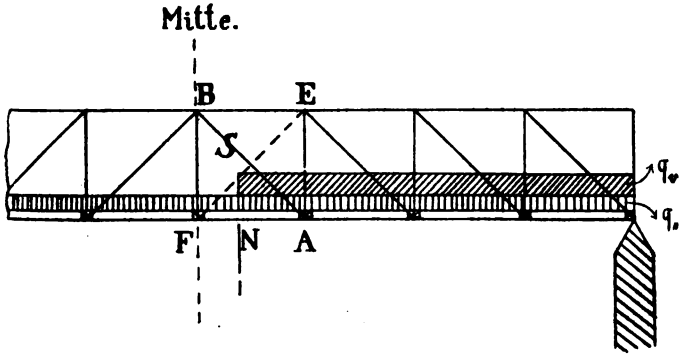
Fig. 170.



$$D = -\frac{a\,q_{\prime\prime}}{2\sin\alpha}.$$

Die Maximal-Vertikalkraft infolge der Zuglaſt q_v iſt im $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ſten Felde folgende (ſiehe Seite 162):

Fig. 151.



$$V_{v\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{a\,q_v}{2}\,\frac{\left(n-\frac{n}{2}-1\right)^2}{n-1} = \frac{a\,q_v}{2}\,\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{n-1}$$

$$= \frac{a\,q_v}{8}\,\frac{(n-2)^2}{n-1} = \frac{a\,q_v}{8}\,\frac{\left(\frac{l}{a}-2\right)^2}{\frac{l}{a}-1}$$

$$= \frac{q_v\,(l-2\,a)^2}{8\,(l-a)},$$

folglich iſt die in S erzeugte Zugſpannung (ſiehe Figur 151):

$$Z = \frac{q_v\,(l-2\,a)^2}{8\,(l-a)\sin\alpha}.$$

[illegible]

[illegible] Zug [illegible] Belastungs- [illegible] Belastung in der [illegible] muß sie zuerst [illegible] In dem Moment, [illegible] und die [illegible] Zugspannung in der [illegible] absorbirt bis auf

$$Z - D = \frac{q_r\,(1 - 2a)^2}{8\,(1 - a)\sin\alpha} - \frac{q_r\,a}{2\sin\alpha} = S.$$

und diese Kraft $Z - D$ wird von der Gegenstrebe EF als Druck aufgenommen, so daß der erforderliche Querschnitt dieser Gegenstrebe:

$$F_{\prime\prime} = \frac{1}{k_{\prime\prime}}\left[\frac{q_r\,(1 - 2a)^2}{8\,(1 - a)\sin\alpha} - \frac{q_r\,a}{2\sin\alpha}\right].$$

Da man der einfacheren Zurichtung halber sämmtlichen Gegenstreben zweckmäßig dieselben Dimensionen giebt, so ist der [illegible] bestimmte Querschnitt der maßgebende:

$$F_{''} = \frac{1}{k_{''}} \left[\frac{61{,}7 \cdot 1600^2}{8 \cdot 1800 \cdot \sin 45^0} - \frac{18{,}0 \cdot 200}{2 \sin 45^0} \right]$$
$$= \frac{13\,100}{k_{''}}.$$

Wählen wir für jedes Feld einer Tragwand eine Gegenstrebe, so wird der Querschnitt einer solchen

$$F_{''} = \frac{1}{2} \frac{13\,100}{k_{''}} = \frac{6550}{k_{''}}.$$

Bei der Berechnung von $F_{''}$ sei bemerkt, daß zur Bestimmung von $k_{''}$ die freie Länge l der Gegenstrebe gleich $^3/_4$ der wirklichen Länge genommen werden kann, da dieselbe in der Mitte mit den Hauptstreben fest verbolzt ist und daher hier nur wenig ausweichen kann.

Man giebt den Gegenstreben des besseren Aussehens halber die Breite der Hauptstreben und ermittelt danach dann die erforderliche Stärke; dieselbe würde in dem obigen Beispiele, bei einer Breite von 22 cm, zu 10 cm zu wählen sein, bei $k_{''} \sim 30$ kg.

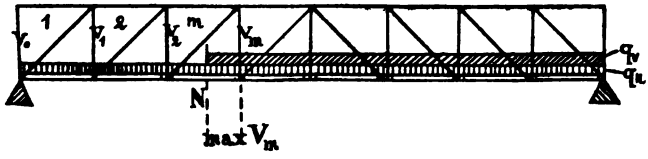
ad 3.

Die Vertikalen e

werden, wie wir bereits gesehen haben, auf Zug beansprucht, sind daher als Hängeeisen angeordnet.

Bei unten liegender Fahrbahn wird in der m^ten Vertikale das V ein max, wenn der Lastenzug bis an die Belastungsscheide des m^ten Feldes vorgerückt ist (siehe Figur 152), bei

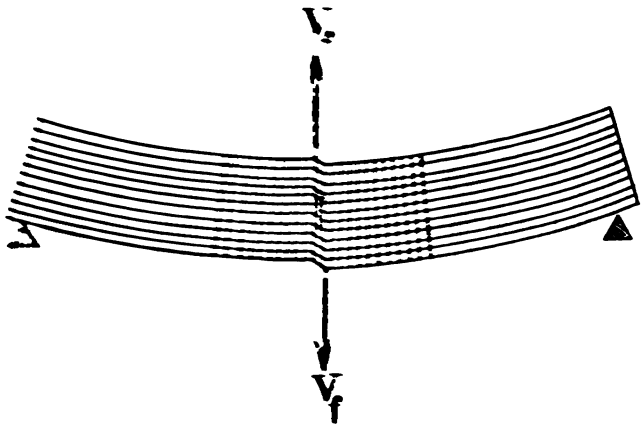
Fig. 152.



[illegible] die horizontalen Schubspannungen bei der Durchbiegung.

Wie wir Seite [illegible] gesehen haben, wirkt die in dem Querschnitte eines durchgebogenen Balkens auftretende Transversalspannung [illegible] als Schub- oder Scheerkraft, d. h. sie hat das Bestreben, die beiden Balkenfragmente in dem Querschnitte f gegeneinander zu verschieben, mit anderen Worten: sie will die vertikalen Querfaserschichten im Querschnitte f gegeneinander verschieben. Wir gehen hierbei von der Vorstellung aus, daß die einzelnen horizontalen Faserschichten zusammengehalten werden zu einem Ganzen durch vertikale oder Querfasern, die ebenfalls [illegible] gelagert sind (siehe Figur 155).

Fig. [illegible]



Eine Verschiebung der Querfaserschichten beansprucht die horizontalen Faserschichten in dem Querschnitte f auf Abscheeren.

Außer dieser vertikalen Scheerkraft in den Querfaserschichten infolge der Durchbiegung des Balkens auch noch

horizontale Schubspannungen in den horizontalen Faserschichten erzeugt, wie folgende Betrachtung ergeben wird:

Wir wissen, daß bei der Durchbiegung die einzelnen horizontalen Faserschichten ihre Länge ändern (siehe Seite 65), d. h. sich verkürzen bezw. verlängern, derart, daß diese Längenänderung von der neutralen Achse nach außen zunimmt. Vor der Durchbiegung haben alle Schichten dieselbe Länge; folglich müssen die einzelnen horizontalen Faserschichten während der Durchbiegung sich gegeneinander verschieben, weil anders eine zunehmende, bezw. abnehmende Längenänderung der Fasern nicht denkbar ist. Eine gegenseitige Verschiebung der horizontalen Faserschichten ist aber nicht möglich, ohne die vertikalen Faserschichten auf Abscheeren zu beanspruchen.

Daß die Tendenz zu solcher Verschiebung bei einem durchgebogenen Balken besteht, geht aus folgender Untersuchung hervor:

Ein massiver Balken von der Höhe h und der Breite b nehme infolge der Belastung durch P die in Figur 156b (siehe Seite 190) gezeichnete, gebogene Form an; die neutrale Faserschicht a'c' behält während der Durchbiegung ihre ursprüngliche Länge ac, so daß a'c' = ac (siehe Seite 66).

Zwei Balken, lose übereinander liegend, deren Höhe $= \frac{h}{2}$ und deren Breite = b (siehe Figur 157a, Seite 191), die also zusammen denselben Querschnitt haben wie der massive Balken, werden, wenn dieselbe Last P auf sie wirkt, jeder für sich durchgebogen.

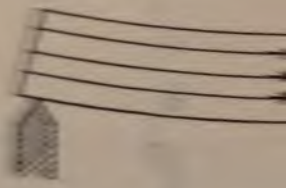
Bezeichnet man vor der Durchbiegung außer den Punkten a und c an den Berührungsflächen je zwei übereinanderliegende Punkte e und f, g und h (durch Kreidestriche), so werden diese Punkte während der Durchbiegung sich gegeneinander verschieben in die Lagen a', c', e', f', g', h'.

Ein Vergleich der beiden Figuren 156 und 157 ergiebt,

[illegible]

[illegible]

Fig. 156.



Sollen diese Punkte im Gleichgewicht [illegible]
Kräfte sich das Gleichgewicht halten, d. h.
Dasselbe gilt für alle Punkte eines du[illegible]
Folglich muß an jeder Stelle eines Que[illegible]
ale Schubspannung gleich der vertikalen, [illegible]
summe der horizontalen Schubspannungen [illegible]
gleich derjenigen der vertikalen Schubsp[illegible]
letztere Gesammtsumme kennen wir als Tr[illegible]

Bezeichnen wir die Gesammtsumme d[illegible]
spannungen in dem Querschnitt C mit H_c

$$V_c = H_c.$$

Nachdem wir somit die Größe der [illegible]
spannung für den ganzen Querschnitt C [illegible]
wollen wir untersuchen, wie sich diese Schu[illegible]
Querschnitt vertheilt.

Wir hatten bereits vorher konstatirt, daß die gegenseitige Verschiebung der Schnittflächen eines gebogenen massiven Balkens, nach dem Durchschneiden in einer horizontalen Faserschicht, um so größer ist, je näher die Schnittflächen der neutralen Achse liegen. Es geht hieraus hervor, daß die horizontale Schubkraft sich **nicht** gleichmäßig über den ganzen Querschnitt vertheilt, sondern um so größer ist, je näher die Faserschicht der neutralen Achse liegt, am größten für letztere selbst.

Wenn wir den rechteckigen Querschnitt eines durchgebogenen Balkens, dessen Höhe = h und Breite = b ist, in horizontale Faserschichten von der Höhe = 1 zerlegen, so wird der Querschnitt h solcher Schichten enthalten.

Denken wir uns die horizontalen Schubspannungen einer jeden Schicht zusammengesetzt zu der Spannung S, und die den einzelnen Schichten entsprechenden Werthe für S als Ordinaten aufgetragen, so erhalten wir das in Figur 159 dargestellte

Fig. 159.

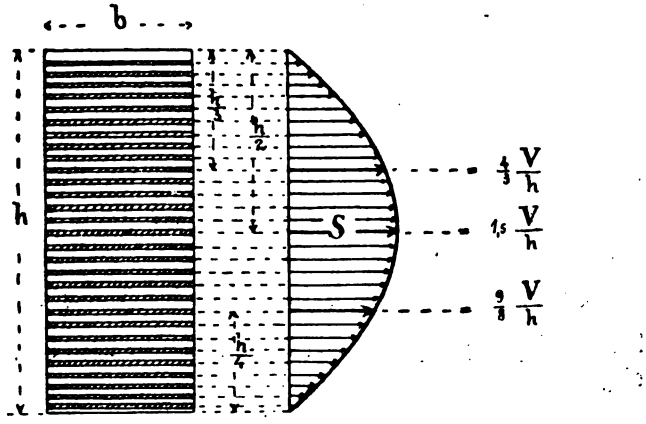
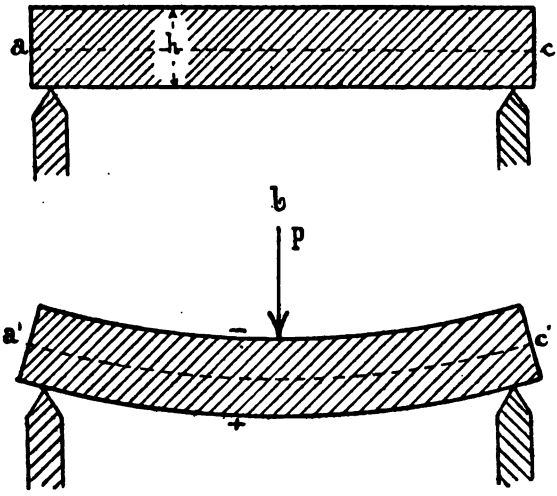


Bild. Die Umgrenzungslinie dieser Spannungen ist eine Parabel, deren Pfeilhöhe $= 1{,}5\,\frac{V}{h}$ ist. Dies bedeutet:

Fig. 156.

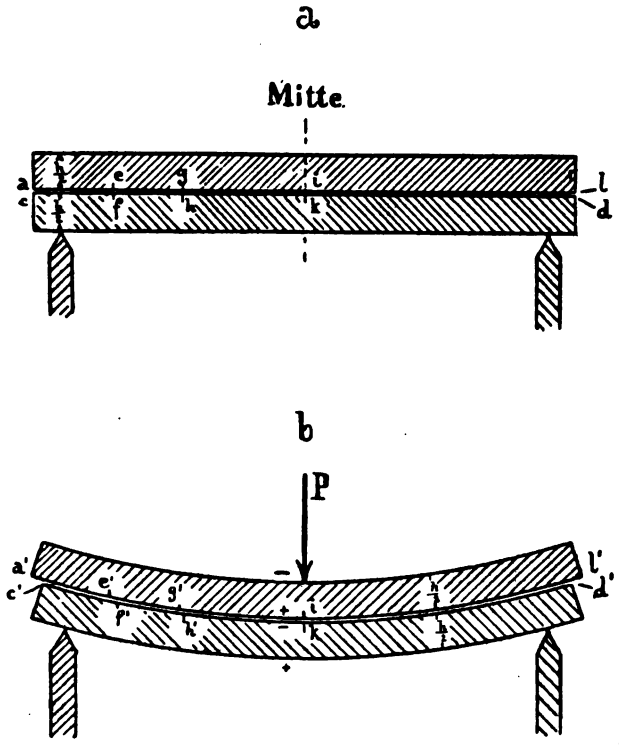
a



daß die Balken vor der Durchbiegung sich in ihrer Form garnicht unterscheiden (bis auf die Fuge), während nach der Durchbiegung die Formen erheblich voneinander abweichen.

Denkt man nun den durchgebogenen massiven Balken (Fig. 156b) in der neutralen Faserschicht a'c' durchschnitten, d. h. zerschneidet man die vertikalen Fasern in dieser Schicht, so werden, unter Beibehaltung derselben Belastung P, die so gebildeten Hälften des massiven Balkens sofort dieselbe Form annehmen wie die beiden Einzelbalken in Figur 157b, d. h. es werden sich die horizontalen Faserschichten der Schnittfläche gegeneinander verschieben in die Lage a'l' bezw. c'd'. Zu dieser Verschiebung muß aber die Tendenz, d. h. die erforderliche Kraft,

Fig. 157.



bereits vor dem Durchschneiden in dem durchgebogenen massiven Balken bestanden haben, weil das Durchschneiden doch unmöglich eine solche Kraft zu erzeugen vermag; dieselbe kann mithin nur infolge der Durchbiegung entstanden sein. Eine solche Tendenz der Verschiebung in einer Schicht bedeutet aber Schubspannung; folglich erzeugt die Durchbiegung in der neutralen Faserschicht horizontale Schubspannungen.

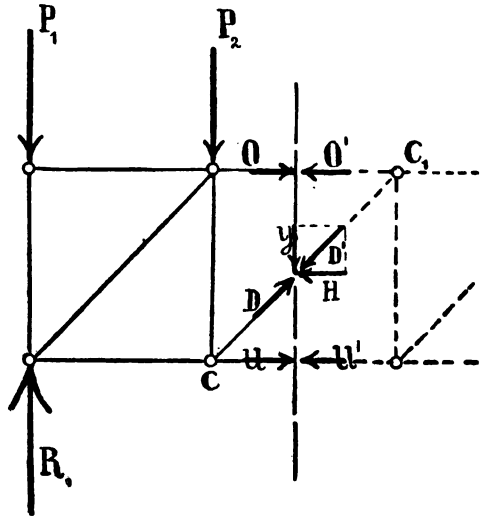
Dieselbe Untersuchung kann man auch für alle anderen horizontalen Faserschichten ausführen, jedesmal wird nach dem

[illegible] Spannungen [illegible] Summe [illegible] Spannungen [illegible] Querschnitt [illegible] Spannungen [illegible] Querschnitt [illegible] Querschnitt [illegible] Querschnitt [illegible]

[illegible] Querschnitt [illegible] durch folgende [illegible]

[illegible] Querschnitt [illegible] Querschnitt [illegible] zweite Seite [illegible] Querschnitt [illegible] Spannungen [illegible] Querschnitt [illegible] Querschnitt [illegible] Querschnitt

Fig. 177.



nur Vertikal- und Horizontalkräfte. Soll dieses Fragment in der Ruhelage verharren, so müssen sich die äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten. Letzteres ist der Fall, wenn die algebraische Summe der Horizontalkräfte (O', U' und H) und diejenige der Vertikalkräfte (R_1, P_1, P_2 und Y), jede für sich $= 0$ ist; d. h. wenn

$$O' + U' + H = 0$$

und

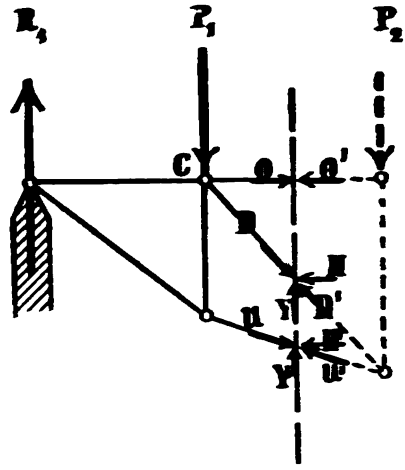
$$R_1 + P_1 + P_2 + Y = 0.$$

Das Vorzeichen der Kräfte ist hier nicht berücksichtigt, weil dieses sich zum Theil erst durch die Rechnung ergiebt.

In den beiden Gleichungen sind H und Y unbekannt, die übrigen Größen bekannt, auch dem Vorzeichen nach; folglich lassen sich Y und H aus den Gleichungen ermitteln, mithin ist D', also auch $D = -D'$ bestimmt.

Sind die Gurtungen nicht parallel (siehe Figur 178), so muß man die nicht horizontale Gurtungsspannung U ebenfalls in ihre Horizontal- und Vertikalcomponente H bezw. V zerlegen.

Fig. 178.



Da U' sich mit Hülfe des konjugirten Punktes C bestimmen läßt, so sind auch H' und Y' bekannt. Für den Gleichgewichtszustand des Fragmentes muß sein:

$$O' + H + H' = 0$$

und

$$R_1 + P_1 + Y + Y' = 0,$$

woraus dann wieder H und Y berechnet werden können.

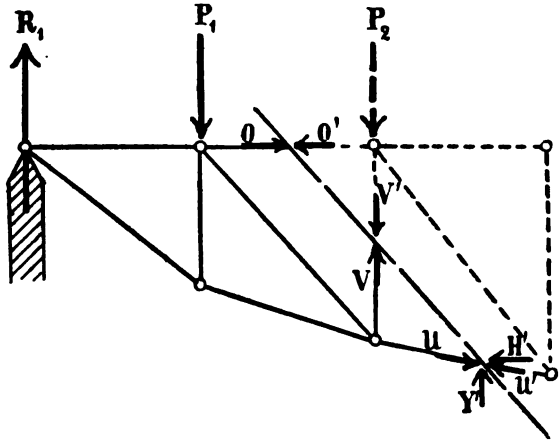
Analog ist die Rechnung durchzuführen für die Vertikale V der Figur 179 (siehe Seite 227). Um die Spannung in dieser zu bestimmen, führt man den Schnitt, wie in der Figur angegeben, und zerlegt U' wieder in Y' und H'; die einzige Unbekannte ist dann V', und diese findet man aus der Gleichung:

$$R_1 + P_1 + V' + Y' = 0.$$

Es ist wohl zu beachten, daß in diesen Gleichungen von dem Vorzeichen (+ oder —) der Kräfte abgesehen ist. Dasselbe ist indeß bei einem Zahlenbeispiel durchaus zu berücksichtigen.

Wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, können wir mit Hülfe der Ritterschen Methode die Größe der Spannungen

Fig. 179.



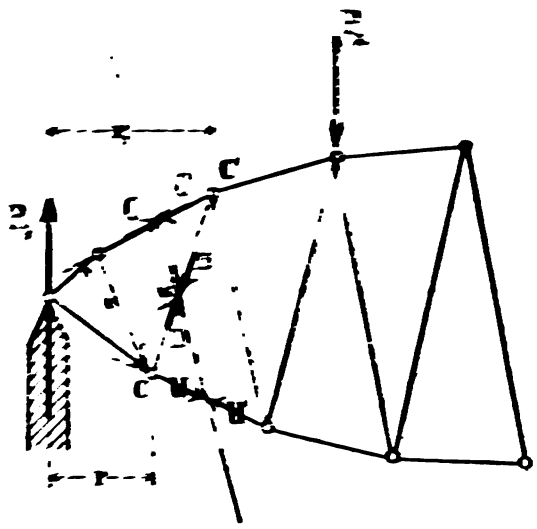
sämmtlicher Konstruktionstheile eines Stabsystems analytisch bestimmen.

Wir können uns aber auch mit Hülfe dieser Methode allgemein Aufschluß verschaffen über die Art der Beanspruchung sowie über die ungünstigste Belastung der einzelnen Konstruktionstheile, und wollen zu dem Zwecke untersuchen, welchen Einfluß eine Einzellast auf die Stäbe ausübt und wann die Maximal-Inanspruchnahme derselben eintritt.

Wir betrachten einen beliebigen Polygonal-Fachwerkträger

[illegible] einem [illegible] durch [illegible]

Fig. [illegible]



Die Last wird die Auflagerreaktionen R_1 und R_2 erzeugen, deren Größen wir rechnerisch bestimmen können.

Um die Spannung des Obergurtstabes O zufinden, führen wir den Schnitt so, daß außer O nur noch zwei Konstruktionstheile geschnitten werden.

Jedes Trägerfragment muß im Gleichgewicht sein, also auch das linke. Dieses giebt, in Beziehung auf den konjugirten Punkt C die Momentengleichung:

$$+R_1 r - O' o = 0$$

und

$$O' = + \frac{R_1 r}{o},$$

wenn r und o die Arme von R_1 und O′ gegen den Punkt C sind.

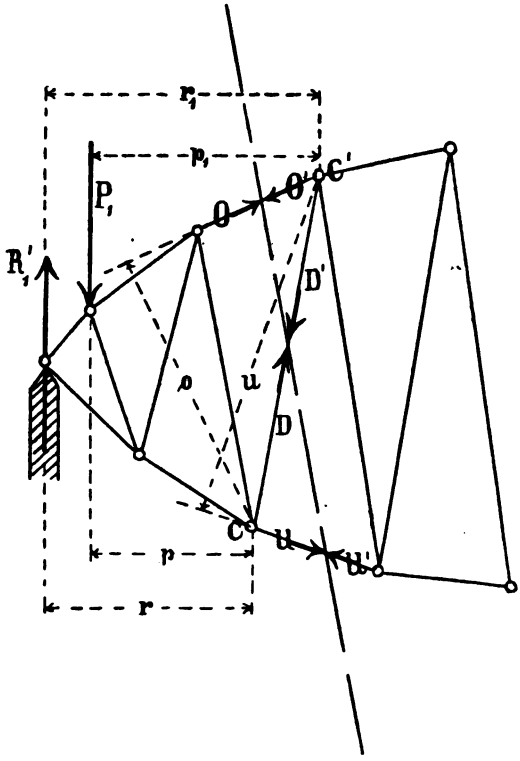
Da $O = -O'$, so ist die Spannung:

$$O = -\frac{R_1 r}{o}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet Druckspannung, also wird der Stab O durch die Einzellast P_2 auf Druck beansprucht.

Wirkt eine Einzellast P_1 auf einen Knotenpunkt links des Stabes O (Fig. 181), so sind die Auflagerreaktionen R'_1 und R'_2

Fig. 181.



[illegible] des [illegible] Trägerfragments [illegible]

$$[illegible] = [illegible]$$

oder

$$= \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

oder

$$= \frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

[illegible] kann, [illegible] — d. h. auf Druck be[illegible]

[illegible] Spannung wird mithin jede [illegible] [illegible] stets Druck [illegible] [illegible] Druck am größten, wenn alle [illegible] [illegible] sind.

[illegible] Spannung für einen Stab U der [illegible] zu finden, daß die Spannung [illegible]

[illegible] [illegible] P_2 rechts allein wirkt, so wird [illegible] [illegible] [illegible]

also

$$U' = \frac{P_1 p_1 - R'_1 r_1}{u}$$

und

$$U = \frac{R'_1 r_1 - P_1 p_1}{u}.$$

Da wieder $R'_1 r_1$ stets $> P_1 p_1$ ist, so ist $U = +$, d. h. Zugspannung.

In dem Stabe U der unteren Gurtung erzeugt mithin jede Einzellast, mag sie rechts oder links des Stabes wirken, stets Zugspannung; und diese wird naturgemäß am größten, wenn alle Knotenpunkte voll belastet sind.

Für die Diagonalen ist der Einfluß einer Einzellast folgender:

Wenn die Kraft P_2 rechts allein wirkt (siehe Fig. 182, Seite 232), so ist für die Spannung D' der konjugirte Punkt in C_2. Und gegen diesen Punkt lautet die Momentengleichung des linken Trägerfragmentes:

$$-R_1 r_2 + D' d = 0,$$

also

$$D' = + \frac{R_1 r_2}{d}$$

und

$$D = - \frac{R_1 r_2}{d}, \text{ d. h. Druck.}$$

Wirkt P_1 links allein, so wird (siehe Fig. 183, Seite 233):

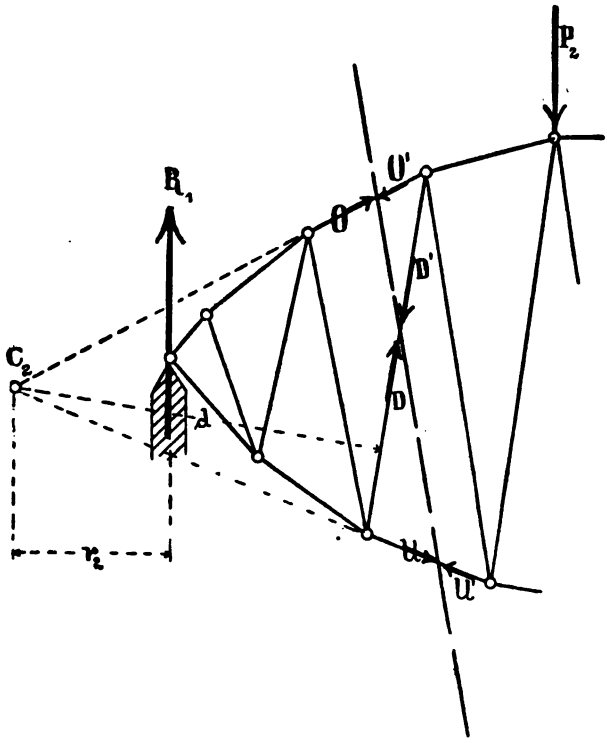
$$-R'_1 r_2 + P_1 p_2 + D' d = 0,$$

also

$$D' = \frac{R'_1 r_2 - P_1 p_2}{d}$$

und

Fig. 182.



$$D = \frac{P_1 p_2 - R'_1 r_2}{d}.$$

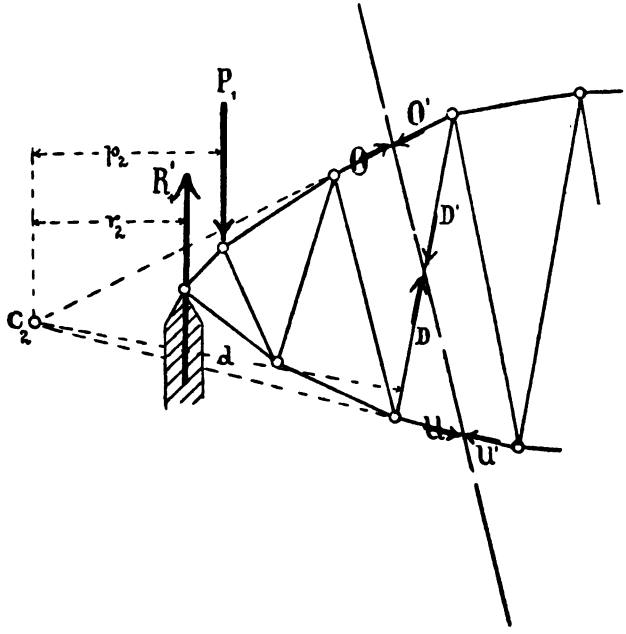
Da $P_1 > R'_1$ sein muß (denn $P_1 = R'_1 + R'_2$), so muß auch, wie aus der Figur ersichtlich,

$$P_1 p_2 > R'_1 r_2$$

sein, folglich ist:

$$D = +, \text{ d. h. Zugspannung.}$$

Fig. 183.

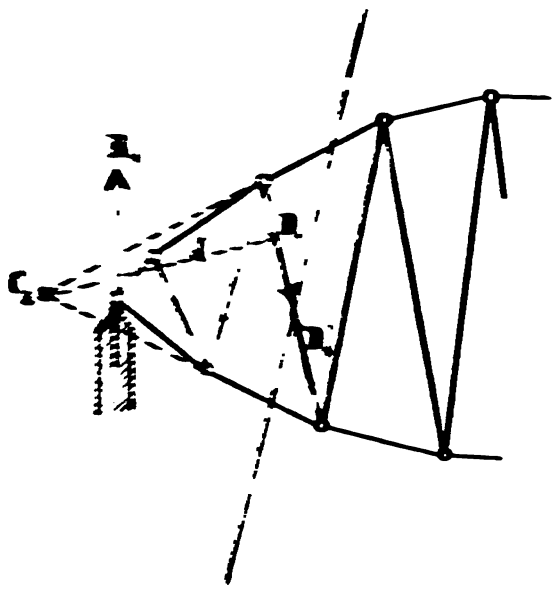


Hieraus folgt:

> Jede Laſt P rechts vom Schnitte beanſprucht den Stab D auf Druck, und jede Laſt links vom Schnitte beanſprucht ihn auf Zug; und zwar tritt für D die Maximal-Druckſpannung ein, wenn rechts volle Belaſtung, links keine Belaſtung, und die Maximal-Zugſpannung, wenn umgekehrt.

Dieſelbe Betrachtung auf die Diagonale D_1 (ſiehe Fig. 184, Seite 234) bezogen, ergiebt das entgegengeſetzte Reſultat, weil der Wirkungsſinn von D_1 gegen C_2 entgegengeſetzt demjenigen von D in Figur 182 und 183 iſt.

Fig. 5.



Es ergiebt hiernach für die Berechnung der Stäbe folgende drei Sätze:

1. Satz:

Jeder Knotenpunktstheil der oberen Gurtung wird nur auf Druck beansprucht und erleidet seine Maximal-Inanspruchnahme bei voller Belastung sämmtlicher Knotenpunkte.

2. Satz:

Jeder Knotenpunktstheil der unteren Gurtung wird nur auf Zug beansprucht, und die Maximal-Spannung findet statt bei voller Belastung sämmtlicher Knotenpunkte.

3. Satz:

Ein Füllungstheil (Diagonale bezw. Vertikale) erleidet seine Maximal-Beanspruchung, wenn der Träger auf einer Seite desselben voll belastet, auf der anderen ganz entlastet ist; und zwar ist das Maximum ein Zugmaximum, wenn derjenige Trägertheil voll belastet ist, in welchem sich der Fußpunkt des Füllungstheiles befindet (in Fig. 185 für D der linke Theil, in Fig. 186

Fig. 185.

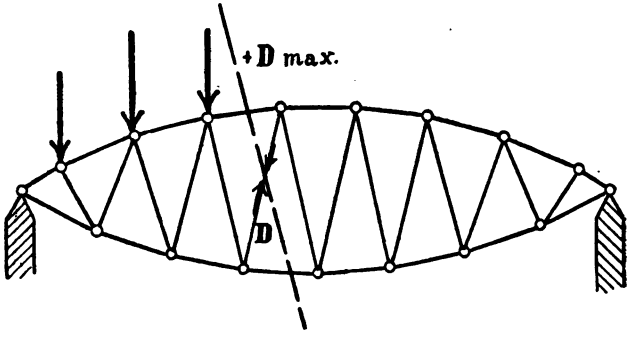
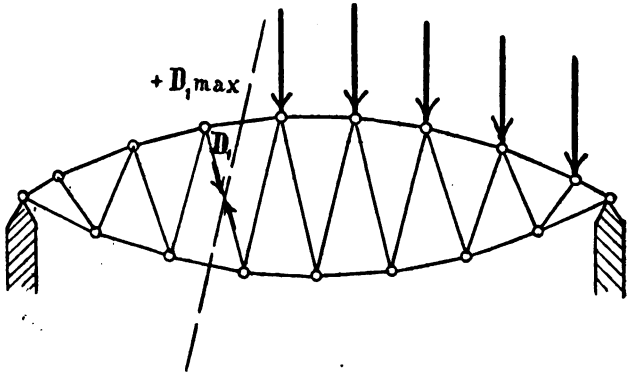


Fig. 186.



für D_1 der rechte Theil); ein **Druckmaximum**, wenn dasjenige Fragment voll belaſtet iſt, in welchem ſich der **Kopfpunkt** des Füllungstheiles befindet (in Fig. 187 für D das rechte Fragment, in Fig. 188 für D_1 das linke).

Dieſe Sätze gelten für Stabſyſteme jeglicher Art.

Fig. 187.

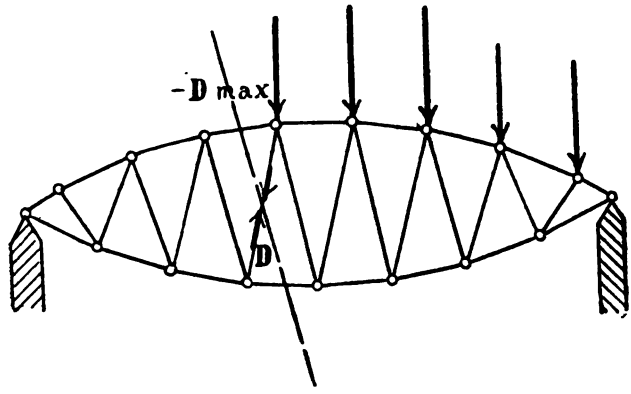
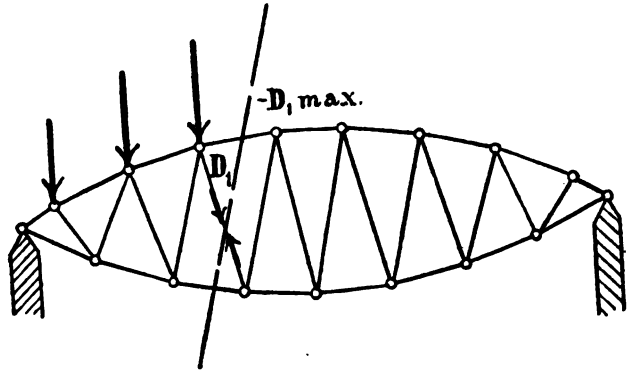


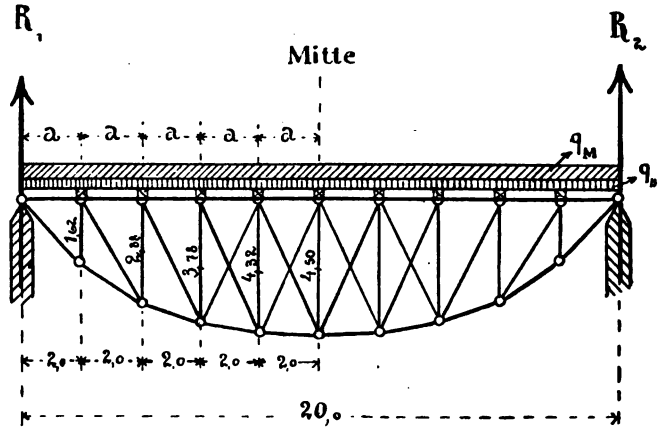
Fig. 188.



Beispiel (Fig. 189):

Ein Polygonalträger von untenstehender Form (Fischbauchträger) mit Zug-Diagonalen (aus Schmiedeeisen) soll berechnet werden für schwerste Belastung.

Fig. 189.



Für $l = 20$ m ist nach M. T. Tab. V:

$q_M = 51{,}00$ kg pro lfd. cm Geleis,
$q_v = 61{,}70$ kg pro lfd. cm Geleis,
$q_{''} = 18{,}00$ kg pro lfd. cm Geleis.

a. Berechnung des Obergurtes.

Maximal-Beanspruchung auf Druck bei voller Belastung.

Bei jedem Stabsystem ist Bedingung, daß die Last nur auf den Knotenpunkten ruhe, also indirekt wirke, damit in den Stäben nur Zug- bezw. Druckspannungen und keine Biegungsspannungen auftreten können.

Bei voller Belastung des Trägers können wir die Gesammt-

belaſtung $q = (q_M + q_n)$ kg pro lfd. cm Geleis ſetzen. Wenn wir zwei Tragwände annehmen, ſo entfällt auf jede:

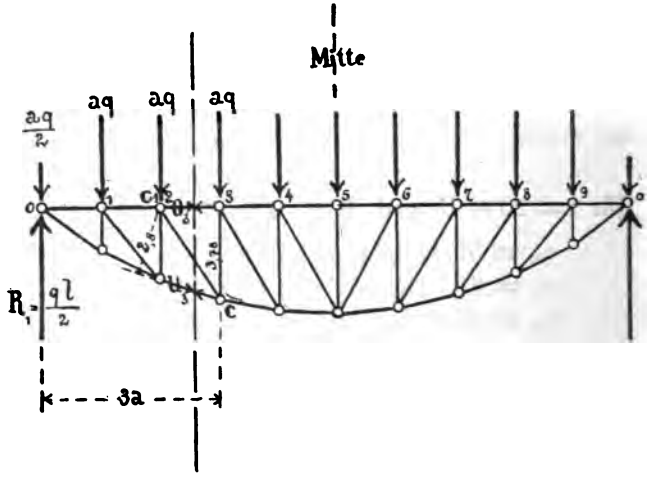
$$q = \frac{51 + 18}{2} = 34{,}5 \text{ kg pro lfd. cm.}$$

Jeder der Knotenpunkte 1 bis 9 hat eine Laſt $= aq$ und die Endknotenpunkte je eine ſolche $= \frac{aq}{2}$ aufzunehmen, während die Auflagerreaktionen

$$R_1 \text{ und } R_2 = \frac{ql}{2}$$

ſind (ſiehe Figur 190).

Fig. 190.



Wollen wir die Spannung des Obergurtſtabes O_3 im dritten Felde ermitteln, ſo müſſen wir durch O_3 einen Schnitt legen ſo, daß außer O_3 noch zwei Konſtruktionstheile getroffen

werden. Für O_3 liegt der konjugirte Punkt in C, und gegen diesen lautet die Momentengleichung:

$$+R_1 \cdot 3a - \frac{aq}{2} \cdot 3a - aq \cdot 2a - aq \cdot a = O_3 \cdot 378$$

also:

$$O_3 = \frac{\frac{ql}{2} \cdot 3a - a^2 q \left(\frac{3}{2} + 2 + 1\right)}{378}$$

$$= \frac{34{,}5 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 200 - 200 \cdot 200 \cdot 34{,}5 \cdot 4{,}5}{378}$$

$$= 38333 \text{ kg.}$$

Mithin ist der erforderliche Querschnitt des Stabes O_3:

$$F_{O3} = \frac{38333}{k};$$

also für Holz

$$= \frac{38333}{70} = 548 \text{ qcm}$$

$$\sim 24/24 \text{ cm.}$$

In derselben Weise kann man den erforderlichen Querschnitt der übrigen Stäbe des Obergurtes ermitteln.

b. Berechnung des Untergurtes.

Derselbe wird, wie wir gesehen haben, auf Zug beansprucht und erfährt seine Maximal-Beanspruchung bei voller Belastung, also auch hier:

$$q = \frac{1}{2}\left(q_M + q_{''}\right) = \frac{51 + 18}{2} = 34{,}5 \text{ kg pro lfd. cm.}$$

Für den Stab U_3 liegt der konjugirte Punkt in C_1; der senkrechte Abstand des Stabes U_3 von C_1 ist aus der Zeichnung

zu entnehmen und sei = 280 cm. Dann lautet die Momentengleichung gegen C_1:

$$+ R_1 \cdot 2a - \frac{aq}{2} \cdot 2a - a q \cdot a = U_3 \cdot 280$$

$$U_3 = \frac{1}{280}\left(\frac{ql}{2} \cdot 2a - 2a^2 q\right)$$

$$= \frac{34{,}5\,(2000 \cdot 200 - 2 \cdot 40000)}{280}$$

$$= 39428 \text{ kg}.$$

Folglich ist der erforderliche Querschnitt des Stabes U_3:

$$F_{u3} = \frac{39428}{k} \text{ qcm}.$$

Nimmt man für den Untergurt schmiedeeiserne Stäbe von 1 cm Stärke und 20 cm Breite, so kann jeder Stab einen Zug aufnehmen von:

$$Z = 20 \cdot 1 \cdot 700 = 14000 \text{ kg}.$$

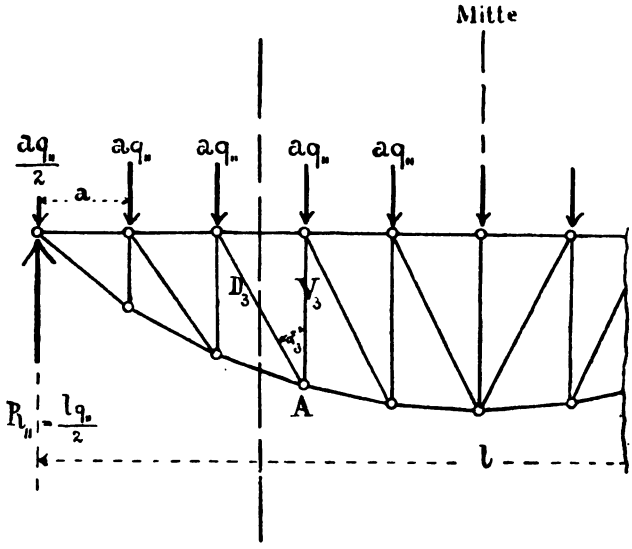
Für U_3 sind mithin $\frac{39428}{14000} = 3$ solcher Stäbe 20/1 cm erforderlich.

c) Berechnung der Diagonale D_3.

Das Eigengewicht $q_{''}$ nimmt man als auf sämmtliche Knotenpunkte gleichmäßig vertheilt an; es entfällt mithin auf die Endknotenpunkte eine Last $= \frac{a\,q_{''}}{2}$, und auf die übrigen eine solche $= a\,q_{''}$ (siehe Fig. 191, Seite 241).

Eine solche Belastung erzeugt, wie wir Seite 176 ꝛc. gesehen haben, in den nach der Mitte hin fallenden Diagonalen Zugspannung; und zwar hängt diese Spannung von derjenigen in der entsprechenden Vertikale V_3 ab. Die im Punkte A wirkende Vertikalkraft ist:

Fig. 191.



$$V_{n3} = R_n - \frac{a\,q_n}{2} - 2\,a\,q_n$$

$$= \frac{l\,q_n}{2} - \frac{5}{2}\,a\,q_n$$

$$= \frac{q_n}{2}(l - 5\,a).$$

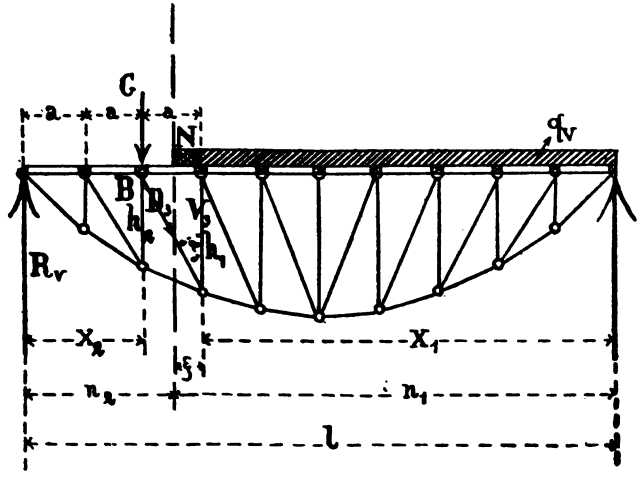
Ist der Winkel zwischen der Diagonale D_3 und der Vertikale $V_3 = \alpha_3$, so ist:

$$+D_{n3} = +\frac{V_{n3}}{\cos\alpha_3} = +\frac{q_n}{2\cos\alpha_3}(l - 5\,a).$$

Die Verkehrslast q_v bewirkt in der Diagonale D_3 eine Maximalbeanspruchung bei einseitiger Belastung (siehe Seite 235 Satz 3); und zwar tritt ein Zugmaximum ($+\max D_3$) ein,

wenn der rechte Trägertheil voll belastet ist, weil dann der Fußpunkt der Diagonale in dem belasteten Theile liegt. Damit also D_3 sein + max erreiche, muß die fortschreitende Belastung bis zur Belastungsscheide N (Fig. 192) vorrücken.

Fig. 192.



Die Lage von N für einen Polygonalträger bestimmt man nach der Gleichung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{x_1 h_2}{x_2 h_1}$$

Da $n_2 = l - n_1$, so ist:

$$n_1 = \frac{(l - n_1)\, x_1 h_2}{x_2 h_1}$$

oder

$$n_1 x_2 h_1 = l x_1 h_2 - n_1 x_1 h_2$$

$$n_1 = \frac{l x_1 h_2}{x_2 h_1 + x_1 h_2} = \xi + x_1$$

und

$$\xi = n_1 - x_1 = \frac{l\, x_1\, h_2}{x_2\, h_1 + x_1\, h_2} - x_1.$$

In dieſer Gleichung ſind l, x_1, x_2, h_1 und h_2 gegeben, alſo ξ beſtimmt.

Da die fortſchreitende Laſt q_v um die Länge ξ in das dritte Feld eingerückt iſt, ſo wird doch ein Theil der in dem Felde liegenden Laſt (doppelt ſchraffirt) von dem Knotenpunkte B aufgenommen, und zwar beträgt dieſer Theil:

$$G = \frac{q_v\, \xi^2}{2\, a}$$

(ſiehe Seite 161).

Für die Spannung der Diagonale D_3 iſt wieder diejenige der Vertikale V_3 maßgebend, und dieſe iſt:

$$\begin{aligned} V_{v3} &= R_v - G \\ &= \frac{q_v\, n_1^2}{2\, l} - \frac{q_v\, \xi^2}{2\, a} \\ &= \frac{q_v}{2}\left(\frac{n_1^2}{l} - \frac{\xi^2}{a}\right). \end{aligned}$$

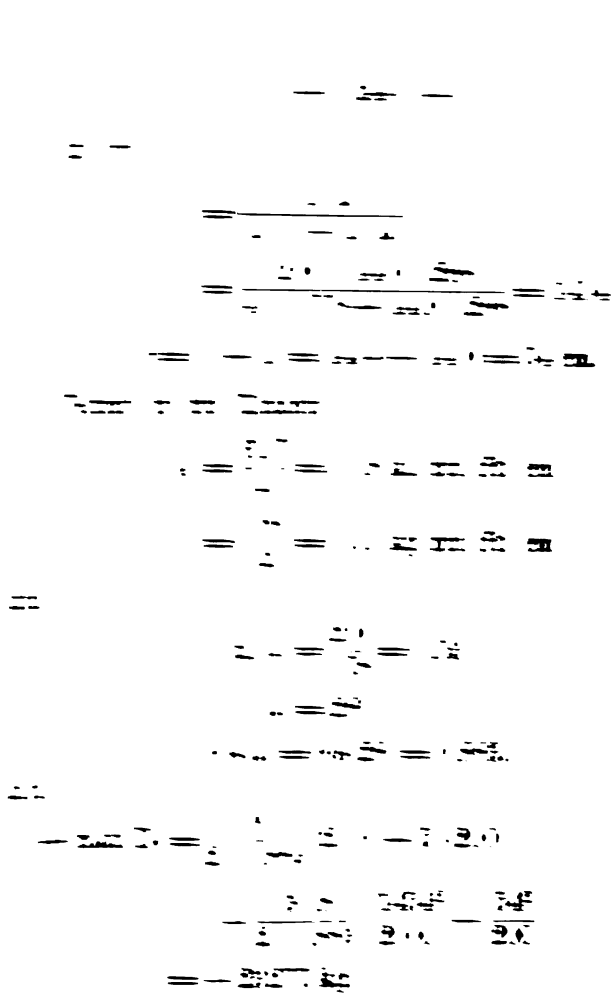
Folglich beträgt die durch die Verkehrslaſt q_v in der Diagonale D_3 erzeugte Maximal-Zugſpannung:

$$+ D_{v3} = \frac{V_{v3}}{\cos \alpha_3} = + \frac{q_v}{2 \cos \alpha_3}\left(\frac{n_1^2}{l} - \frac{\xi^2}{a}\right).$$

Und die Geſammt-Zugſpannung der Diagonale 3 iſt mithin:

$$\begin{aligned} + \max D_3 &= + D_{\prime\prime 3} + D_{v3} \\ &= + \frac{q_{\prime\prime}}{2 \cos \alpha_3}(l - 5\, a) + \frac{q_v}{2 \cos \alpha_3}\left(\frac{n_1^2}{l} - \frac{\xi^2}{a}\right). \end{aligned}$$

Die Zahlenwerthe unſeres Beiſpiels eingeſetzt, giebt Folgendes:



[illegible]

[illegible]

$$= \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

$$= \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]$$

$$= [illegible] = [illegible] = [illegible] \text{ cm}$$

[illegible]

$$[illegible] = [illegible] = [illegible] \text{ cm}$$

$$= [illegible] = [illegible] \text{ cm}$$

[illegible]

$$[illegible] = [illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible] = [illegible]$$

[illegible]

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible] - [illegible]$$

$$= [illegible] \text{ kg}$$

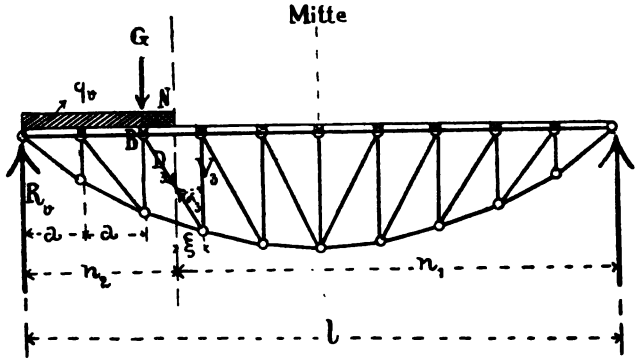
Nehmen wir wieder [illegible] Stäbe 20·1 cm an, so ist die für das dritte Feld erforderliche Anzahl von Diagonalstäben:

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = 2$$

Wir haben bisher den Fall betrachtet, daß der Zug von rechts aufführt. Wenn nun der Zug von links aufführt bis an die Belastungsscheide N, so erleidet D_3 infolge der (fort-

schreitenden) Verkehrslast ein Druckmaximum (siehe Fig. 193), weil dann der Kopf der Diagonale in dem belasteten Theile liegt.

Fig. 193.



Die Beanspruchung durch das Eigengewicht $q_{''}$ bleibt natürlich dieselbe, also:

$$D_{''3} = + \frac{q_{''}}{2 \cos \alpha_3} (l - 5\,a)$$

$$= + \frac{9}{2 \cdot 0{,}883} (2000 - 5 \cdot 200)$$

$$= + \frac{9000}{1{,}766} = + 5096 \text{ kg}.$$

Die Beanspruchung durch die Verkehrslast q_v wird folgende sein:

Die linke Auflagerreaktion ist

$$R_v = \frac{n_2\, q_v \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)}{l}$$

$$= \frac{n_2\, q_v (2\, n_1 + n_2)}{2\, l}.$$

Die über dem dritten Felde ruhende Last (doppelt schraffirt)

vertheilt sich auf beide Knotenpunkte des Feldes, und zwar ist der auf B entfallende Theil:

$$G = \frac{(a - \xi)\, q_v \left(\xi + \frac{a - \xi}{2}\right)}{a}$$

$$= \frac{q_v (a - \xi)(a + \xi)}{2a}$$

$$= \frac{q_v (a^2 - \xi^2)}{2a}.$$

Mithin ist die im dritten Felde bestehende Vertikalkraft:

$$V_{v3} = R_v - 2a\, q_v - \frac{q_v (a^2 - \xi^2)}{2a}$$

$$= \frac{n_2\, q_v (2 n_1 + n_2)}{2l} - 2a q_v - \frac{q_v (a^2 - \xi^2)}{2a}$$

$$= \frac{q_v}{2}\left[\frac{n_2 (2 n_1 + n_2)}{l} - \frac{5a^2 - \xi^2}{a}\right]$$

$$D_{v3} = \frac{q_v}{2 \cos \alpha_3}\left[\frac{n_2 (2 n_1 + n_2)}{l} - \frac{5a^2 - \xi^2}{a}\right].$$

Es ist:

$$n_2 = l - n_1 = 2000 - 1454$$
$$= 546$$

$$D_{v3} = \frac{30{,}8}{2 \cdot 0{,}883}\left[\frac{546\,(2 \cdot 1454 + 546)}{2000} - \frac{5 \cdot 200^2 - 54^2}{200}\right]$$

$$= -741 \text{ kg (Druck)}.$$

Folglich ist, wenn der Zug von links auffährt, die Gesammt-Beanspruchung der Diagonale D_3:

$$\max D_3 = +5096 - 741$$
$$= +4355 \text{ kg}.$$

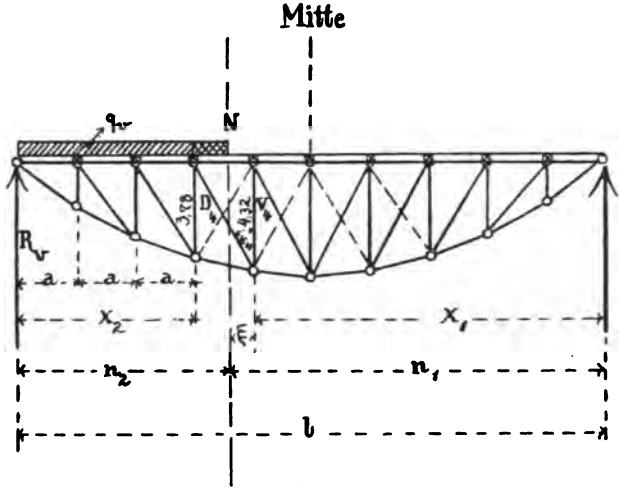
Für den Belastungsfall nach Figur 192 hatten wir gefunden:

$$\max D_3 = + 23277 \text{ kg}.$$

Es wird also die Diagonale D_3 für beide Fälle der Laſtenſtellung auf Zug beanſprucht, mithin iſt im dritten Felde eine Gegendiagonale nicht erforderlich.

Unterſuchen wir in dieſer Beziehung das vierte Feld, ſo iſt (ſiehe Fig. 194):

Fig. 194.



$$n_1 = \frac{l\, x_1\, h_2}{x_2\, h_1 + x_1\, h_2} = \frac{2000 \cdot 1200 \cdot 378}{600 \cdot 432 + 1200 \cdot 378}$$

$$= 1273 \text{ cm}.$$

$$n_2 = 2000 - 1273 = 727 \text{ cm}$$

$$\xi = n_1 - x_1 = 1273 - 1200 = 73 \text{ cm}.$$

Iſt der Träger rechts von N voll belaſtet, ſo erleidet D_4 ein Zug-Maximum; daher brauchen wir dieſen Fall der Belaſtung für unſere Unterſuchung nicht in Betracht ziehen.

bis zur Belastungsscheide N voll belastet ist. Wir erhalten daher für max V_3 dieselbe Lastenstellung, wie für max D_3.

Folglich ist:

$$\max V_3 = V_{,,3} + V_{v3} \text{ (siehe Seite 241 und 243)}$$

$$= \frac{q_{,,}}{2}(l - 5\,a) + \frac{q_v}{2}\left(\frac{n_1{}^2}{l} - \frac{\xi^2}{a}\right)$$

$$= \frac{9}{2}(2000 - 5 \cdot 200) + \frac{30{,}8}{2}\left(\frac{1454^2}{2000} - \frac{54^2}{200}\right)$$

$$= 20553 \text{ kg (Druck)}.$$

Hölzerne Vertikalen angenommen, wird:

$$F_{v3} = \frac{20553}{k_{,,}} \quad \frac{20553}{44}$$

$$= 467 \text{ qcm} \sim 24/24 \text{ cm}.$$

Die übrigen Vertikalen werden in derselben Weise berechnet.

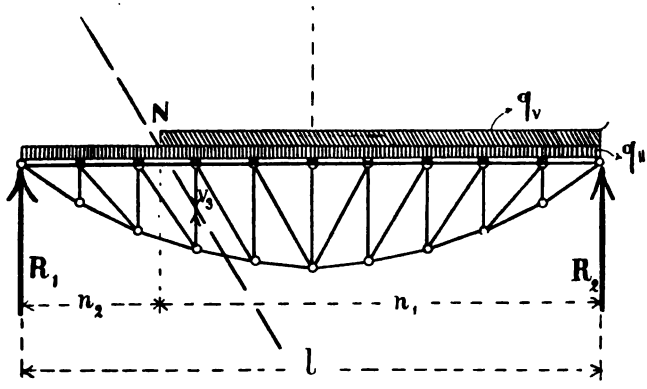
Da wir aber in unserem Beispiel schlaffe (Zug-)Diagonalen angenommen haben, und diese eine Druckbeanspruchung nicht erleiden dürfen, so ist in dem vierten Felde eine Gegendiagonale erforderlich von solcher Stärke, daß sie eine Zugspannung = 140 kg aufnehmen kann. Hierzu würde ein schmiedeeiserner Stab 20,1 cm völlig ausreichend sein.

In dem fünften Felde wird dementsprechend auch eine Gegendiagonale nothwendig, deren Querschnitt analog zu bestimmen ist.

d) Berechnung der Vertikale V_3.

Um die Spannung in V_3 zu bestimmen, muß man den Schnitt wieder so legen, daß außer V_3 noch zwei Konstruktionstheile getroffen werden (siehe Fig. 195). Da die Diagonalen nur

Fig. 195.



auf Zug beansprucht werden sollen, so müssen die Vertikalen, wie wir bereits auf Seite 177 gesehen, auf Druck beansprucht werden.

Infolge der fortschreitenden Belastung q_v wird die Spannung V_3 ein Druck-Maximum, wenn der rechte Theil des Trägers

	Seite
Torsionsfestigkeit	37
Tragmodul	41
Träger, Howe'scher	170
Träger, kontinuirlicher	151
Träger, offen gebauter	217
Träger, Polygonal-	237
Träger, verdübelter	196
Träger, verspannter	15. 42
Trägheitsmoment	76
Transversalkraft, Definition	83
Transversalkraft, Gesetz für ruhende Belastung	111
Transversalkraft, Gesetze für fortschreitende Belastung	140
Transversalkraft, Max, für Eisenbahnzüge	142
Transversalspannung	83
Umfahrungssinn	8
Verdübelte Träger	196
Verkehrslast	155
Verspannter Träger	15. 42
Vertikalen, Spannung in	185. 249
Vertikale Schubspannung	84
Vertikalkraft	83
Wendepunkt	91
Widerstandsmoment	77
Wirkung der Einzelkraft	2
Zerknickungsfestigkeit	45
Zerlegung von Kräften	8
Zugfestigkeit	38
Zugstäbe bei Stabsystemen	237. 240
Zulässige Beanspruchung	41
Zusammensetzung von Kräften	5. 22
Zwischenunterstützungen	150

Gedruckt in der Königlichen Hofbuchdruckerei von E. S. Mittler & Sohn, Berlin SW., Kochstraße 68—70.

3. Inanspruchnahme der Brücken

durch gleichmäßig vertheilt gedachte Verkehrslast bezw. Eigengewicht pro lfd. cm Geleis in kg.

M. T. Tabelle Va.

Spannung in m	Verkehrslast						Eigengewicht
	3 Güterzugmaschinen mit Tender, zu 66 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		1 Güterzugmaschine mit Tender, zu 66 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		1 Personenzugmaschine zu 66,6 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		
	q_M	q_V	q_M	q_V	q_M	q_V	$q_{''}$
1	260	260	260	260	262	262	6,6
2	130	176	130	176	131	137	7,2
3	110	147	110	147	87	118	7,8
4	110	134	110	134	68,5	98,6	8,4
5	102	116	102	116	66,8	87,7	9,0
6	93,3	103	93,3	103	65,2	82,4	9,6
7	83,9	92,3	83,9	92,3	63,4	76,3	10,2
8	75,8	86,5	75,8	86,5	60,1	70,5	10,8
9	69,5	81,8	69,5	81,8	57,1	64,2	11,4
10	64,5	78,2	64,5	78,2	54,3	63,2	12,0
11	61,6	75,0	61,6	75,0	52,8	61,5	12,6
12	59,6	71,8	59,6	71,8	52,4	60,8	13,2
13	57,7	69,0	57,0	69,0	51,7	60,1	13,8
14	56,8	67,4	55,0	66,8	51,0	59,5	14,4
15	54,0	65,8	53,0	64,8	50,3	58,9	15,0
16	53,2	64,2	51,2	63,0	49,9	57,7	15,6
17	52,4	63,1	49,4	61,5	48,9	56,5	16,2
18	51,8	62,4	47,6	60,0	47,7	55,3	16,8
19	51,4	62,0	46,0	58,7	46,5	54,2	17,4
20	51,0	61,7	44,3	57,6	45,4	53,1	18,0
21	50,9	61,2	43,0	56,4	44,5	52,2	18,6
22	50,7	60,7	41,8	55,3	43,7	51,3	19,2
23	50,5	60,0	40,5	54,6	42,9	50,5	19,8
24	50,4	59,4	39,5	53,7	42,2	49,7	20,4
25	50,2	58,9	38,5	52,5	41,5	49,0	21,0
26	50,0	58,4	37,9	51,7	40,7	48,4	21,6
27	49,8	57,9	37,3	50,9	39,9	47,8	22,2

Spannung in m	Verkehrslast: 3 Güterzugmaschinen mit Tender, zu 66 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		1 Güterzugmaschine mit Tender, zu 66 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		1 Personenzugmaschine zu 66,6 t Gewicht; Wagen zu 16 t Gewicht		Eigengewicht
	q_u	q_v	q_u	q_v	q_u	q_v	q_n
28	49,7	57,3	36,8	50,0	39,1	47,3	22,8
29	49,6	56,8	36,2	49,2	38,4	46,8	23,4
30	49,5	56,3	35,7	48,4	37,7	46,2	24,0
31	49,3	56,0	35,2	47,9	37,1	45,7	24,6
32	49,2	55,7	34,8	47,3	36,5	45,2	25,2
33	49,0	55,4	34,3	46,8	36,0	44,7	25,8
34	48,9	55,2	33,6	46,1	35,5	44,3	26,4
35	48,7	55,0	33,3	45,7	35,0	43,8	27,0
36	48,5	54,8	32,9	45,1	34,5	43,4	27,6
37	48,4	54,6	32,4	44,8	34,1	42,9	28,2
38	48,3	54,5	31,9	44,3	33,7	42,6	28,8
39	48,1	54,4	31 3	43,8	33,2	42,2	29,4
40	48,0	54,3	30,8	43,3	32,8	41,9	30,0

Gedruckt in der Königl. Hofbuchdruckerei von E. S. Mittler & Sohn,
Berlin SW., Kochstraße 68—70.

TG 445 .S69
Die Grundzuge der Festigkeitsl
Stanford University Libraries
3 6105 041 656 534